TD 8 : File M/M/1

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Exercice 1 (Processus de Poisson et base de données)

Une base de données peut recevoir deux types de consultations : des lectures et des écritures qui se produisent selon des processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_R et λ_W.

1. Quelle est la probabilité que l'intervalle de temps entre deux lectures soit plus grand que t ?
2. Quelle est la probabilité que le prochain événement soit une lecture ?
3. Quelle est la probabilité qu'au plus n écritures se produisent dans l'intervalle de temps $[0, t[$?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 événements (lecture ou écriture) se produisent dans l'intervalle de temps $[0, t[$?

Exercice 2 (Distribution de la taille de la file)

On étudie une file d'attente M/M/1 avec un serveur et une capacité infinie. Les temps d'inter-arrivées et de service sont choisis exponentiels de paramètres respectifs λ et μ. On pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ le taux d'utilisation du serveur. Le nombre de clients dans la file, noté $N(t)$, est une chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Décrire le schéma de Matthes de cette file.
2. Déterminer le générateur infinitésimal de la chaîne.
3. Donner la condition de stabilité de la file et la démontrer à l'aide des théorèmes de Foster.
4. Calculer l'unique distribution stationnaire $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cette chaîne.
5. Faire de même en utilisant la fonction génératrice.
6. Retrouver ce résultat en résolvant la récurrence linéaire obtenue en écrivant l'équation d'équilibre pour un état.
7. Donner l'espérance L du nombre de clients dans le système. La représenter graphiquement.
8. Donner l'espérance L_q du nombre de clients dans la file. Comment L et L_q sont-il reliés ?

Exercice 3 (Distribution du temps d'attente)

On reprend la file de l'exercice précédent.

1. Pourquoi ne peut-on pas donner directement la distribution du temps d'attente ?

On fait désormais l'hypothèse d'une politique de service PAPS (premier arrivé, premier servi). On note T_q la variable aléatoire qui dénote le temps d'attente d'un client dans la file et $W_q(t)$ sa fonction de répartition.

2. Quelle est la probabilité q_n qu'un client arrive dans la file et trouve n personnes devant lui ? Est-ce le cas pour une file générale ?
3. La variable aléatoire T_q est-elle discrète ? à densité ? Quelle est la valeur de $W_q(0)$?

Le temps de service de n clients suit une distribution d'Erlang de paramètres n (paramètre de forme) et μ (paramètre d'intensité) dont la fonction de densité est

$$E(k, \lambda, x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}.$$

4. En utilisant la formule des probabilités totales, donner une expression pour $W_q(t)$.
5. Donner l'espérance W_q de T_q.
6. Adapter les deux questions précédentes pour traiter le cas de T, le temps de séjour total dans le système.
7. Quelle relation y a-t-il entre L_q et W_q d'une part, et L et W d'autre part ?