TD 5 : Chaînes de Markov finies

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Exercice 1 (Chapman-Kolmogorov)

On rappelle les *équations de Chapman-Kolmogorov* vérifiées par les chaînes de Markov :

$$\forall i j \in \mathcal{E}, p_{ij}(n+m) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(n) \cdot p_{kj}(m)$$

La notation $p_{ij}(n)$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes. On se donne une suite (X_n) de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X_0 = -1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$ et on définit la suite (Y_n) par : $Y_{2n} = X_n$ et $Y_{2n+1} = X_n X_{n+1}$.

1. Montrer que la suite (Y_n) est i.i.d.
2. Vérifier que la suite (Y_n) satisfait les équations de Chapman-Kolmogorov.
3. Montrer que ce n'est pourtant pas une chaîne de Markov.
4. On considère la suite (Y_n, Y_{n+1}). Montrez qu'il s'agit d'une chaîne de Markov (non homogène).

Exercice 2 (Problème du partiel de 2010)

Les chaînes de Markov considérées ici sont finies, c'est-à-dire leur nombre d'états est fini. Dans ce cadre, on dispose du théorème suivant :

Théorème (Perron-Frobénius faible)

Si P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène finie irréductible et apériodique, alors il existe une unique distribution stationnaire π.

L'objectif de ce problème est de ramener le cas des chaînes homogènes finies à ce théorème et de donner une méthode algorithmique de décomposition.

On définit la relation de communication $i \leftrightarrow j$ par $\exists n \, \exists m,\ p_{ij}(n) > 0, p_{ji}(m) > 0$. On rappelle que $p_{ij}(n)$ désigne la probabilité d'aller de l'état i à l'état j en n transitions et que par convention $p_{ii}(0) = 1$.

Ajout 2011 : Comme vous ne l'avez pas encore vu en cours, je vous donne la définition d'un état récurrent et un critère de récurrence :

$$i \text{ est récurrent } := \quad \mathbb{P}(\tau_i < +\infty) = 1 \quad \iff \sum_{n \geqslant 0} p_{ii}(n) = +\infty.$$

où τ_i est le *temps de retour* en i.

1. Vérifier que la relation de communication est une relation d'équivalence.
2. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées *classes de communication*. Montrer que tous les états d'une même classe sont de même nature : ou bien tous récurrents ou bien tous transcients.
3. Montrer que deux états d'une même classe de communication ont même période.
4. Quelles sont les classes *finales*, *i.e.* celles que l'on ne peut quitter ?
5. Justifier que l'ensemble des états de la chaîne peut se partitionner en $T \cup R_1 \cup \cdots \cup R_n$ où T contient les états transcients et chaque R_i est une classe finale.
6. Montrer que, presque sûrement, la chaîne ne reste pas dans l'ensemble des états transcients.
   (on pourra utiliser la caractérisation des états transcients : i est transcient *ssi* $\sum_{n \geqslant 0} p_{ii}(n) < +\infty$)
7. Que dire de la chaîne restreinte à une classe finale ? Est-elle apériodique ? irréductible ? Justifier.
8. Montrer que si une classe finale est de période $d > 1$, alors elle peut se décomposer en d sous-ensembles irréductibles apériodiques pour la chaîne de matrice P^d.

9. Étant donné un état initial i, on cherche à savoir dans quelle classe finale la chaîne va se retrouver. Pour cela, on reprend la décomposition de la question 5 et on fusionne tous les états d'une classe finale en un unique état. On obtient alors une matrice P^* de la forme
$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$
avec n le nombre classes finales de la chaîne. En utilisant la loi des probabilités totales, montrer que la probabilité d'aller dans une classe finale depuis T est donné par la matrice $\sum_{m\geqslant 0} BQ^m = B(I_{|T|} - Q)^{-1}$, *i.e.* la probabilité d'atteindre la i^{e} classe finale depuis une distribution π sur T est $(B(I_{|T|} - Q)^{-1}\pi)_i$.

10. En utilisant les résultats des questions précédentes, donner un algorithme qui calcule la probabilité asymptotique d'être dans un état i d'une chaîne de Markov finie.

11. Illustrer cet algorithme sur la chaîne suivante à sept états numérotés de 1 à 7 (les entrées laissées vides correspondent à des 0).
$$\begin{pmatrix}
0{,}5 & 0{,}8 & & & & 0{,}1 & 0{,}1 \\
0{,}5 & 0{,}2 & & & & & 0{,}1 \\
 & & & 1 & 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\
 & & 0{,}4 & & & 0{,}1 & \\
 & & 0{,}6 & & & 0{,}2 & 0{,}1 \\
 & & & & & 0{,}3 & 0{,}2 \\
 & & & & & 0{,}1 & 0{,}4
\end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Temps d'arrêt)

Une variable aléatoire T est un temps d'arrêt pour une suite de v.a. (X_n) lorsque l'événement $\{T = m\}$ ne dépend que de $X_1, \ldots, X_m$. On fixe (X_n) et on se donne T_1 et T_2 deux temps d'arrêts pour X. Indiquer si les v.a. suivantes sont des temps d'arrêt :

1. une variable aléatoire constante
2. le premier retour en un point
3. le dernier retour en un point
4. $T_1 + k$, où $k \in \mathbb{N}$
5. $T_1 - k$, où $k \in \mathbb{N}$
6. $\max(T_1, T_2)$ et $\min(T_1, T_2)$
7. $T_1 + T_2$ et $T_1 - T_2$
8. $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid X_1 + \cdots + X_n \leqslant t\}$ (on suppose les X_n positifs)
9. $N(t) + 1$