TD 4 : Schémas de Matthes et chaînes de Markov finies

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Schéma de Matthes

Exercice 1 (Commutation de paquets)

Un réseau à commutation de paquets (comme internet) transporte des paquets contenant de l'information. Il est formé de canaux de communication et de routeurs chargés d'aiguiller les paquets sur le bon canal. À chaque fin de transmission d'un paquet, ou bien le routeur qui l'a reçu le fait disparaître dans un réseau local (le paquet est arrivé à destination), ou bien il tente de le transmettre sur un canal. Le débit de transmission nécessaire à un instant à travers un canal donné peut potentiellement excéder sa capacité. Les routeurs sont donc équipés de mémoires pour mettre en attente les paquets excédentaires.

On va supposer pour simplifier que les routeurs ont une mémoire illimitée et qu'ils choisissent instantanément le canal vers lequel rediriger un paquet tout juste arrivé, si bien que les ressources critiques sont les canaux, qu'on va supposer de capacité égale à un. Chaque routeur est relié à un réseau local qui émet et reçoit des paquets. Dans un routeur, l'apparition d'un nouveau paquet qui sera aiguillé sur le canal c est gouvernée par un processus de Poisson de paramètre λ_c. Le routage est représenté par une matrice de transition qui donne la probabilité p_{ij} qu'un paquet sortant du canal i entre dans le canal j. Les paquets sont transmis de manière séquentielle et la durée de transmission d'un paquet suit une loi exponentielle de paramètre μ_c (qui dépend de la fiabilité du canal c).

1. Préciser le devenir d'un paquet (avec les probabilités) qui arrive sur un routeur.
2. Donner le schéma de Matthes correspondant à cette situation. Écrire la procédure de simulation de ce schéma en pseudo-code.

2 Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov sont définies par la propriété éponyme que voici :

$$\forall n, \forall x_1, \dots, x_n,\ \mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_0 = x_0,\ X_1 = x_1, \dots\ X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1})$$

Lorsque cette probabilité conditionnelle ne dépend pas de n, la chaîne est dite *homogène*. Cela correspond à son indépendance vis-à-vis du temps. On peut alors représenter les transitions de la chaîne par une multiplication matricielle.

Exercice 2

On lance un dé à six faces. Est-ce que les variables aléatoires suivantes sont des chaînes de Markov ? Si oui, préciser leurs graphes de transition.

1. La plus grande valeur observée jusqu'au n^{e} lancer.
2. Le nombre de six obtenus jusqu'au n^{e} lancer.
3. Le nombre de lancers depuis le dernier six.
4. Le nombre de lancers jusqu'au prochain six.

Peut-on dégager un schéma général ?

Exercice 3

On considère un système composé de n stations qui émettent des messages. Le temps est discret et un entier $W > 0$ est fixé.

Si à un instant une station i à un message à émettre, elle tire indépendamment un entier aléatoire W_i dans $\{0, 1, \dots, W-1\}$. A chaque nouvel instant, elle décrémente de 1 son entier W_i. A l'instant où W_i vaut 0, elle émet son message.

Si une seule station émet à un instant donné, son message est bien transmis. Si elle a un autre message à émettre, elle tire à l'instant suivant un nouvel entier aléatoire et recommence la procédure.

Si deux stations ou plus émettent en même temps, les messages se brouillent, on parle de *collision*. L'émission de tous ces messages échoue. Chaque station concernée conserve son message et tire à l'instant suivant et indépendamment un nouvel entier aléatoire. La procédure continue ainsi de suite.

1. Que se passe-t-il dans le système si on choisit $W = 1$?
2. On suppose que à l'instant $t = 0$, chaque station a un nombre fixé, fini ou infini, de messages qu'elle doit transmettre les uns après les autres. Montrer que l'on peut décrire la dynamique du système sous forme d'une chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble d'états bien choisi. Illustrer en dessinant le graphe de transition dans le cas $n = 2$, $W = 2$ et 1 message à transmettre par station, ainsi que dans le cas $n = 2$, $W = 3$ et une infinité de messages par station.

Exercice 4

Donner les matrices de transition et les graphes associés pour les problèmes suivants et calculer, si elles existent, les distributions limites en utilisant des relations de récurrences.

1. Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.
   – Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
   – Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
   – Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
   – Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
   – Courir est fatigant ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.
2. Ruine du joueur : un joueur commence avec un pactole de s €. Il lance une pièce : si elle tombe sur pile il gagne 1 €, sinon il perd 1 €. Il joue jusqu'à atteindre une fortune de M € ou être ruiné.
3. Marche aléatoire isotrope sur $\mathbb{Z}$
4. Diffusion de Ehrenfest : N particules sont enfermées dans deux boîtes reliées par un tube. À chaque instant (discret), une particule est choisie de façon uniforme et passe d'une boîte à l'autre. On s'intéresse au nombre de particules dans chaque boîte.

Exercice 5 (Analyse d'une multinationale)

Une multinationale doit traiter un dossier très sensible. Il est certain que lorsqu'il sera découvert, le cadre qui en est actuellement en charge se fasse remercier pour incompétence, ceci afin de préserver l'image de l'entreprise. Chaque personne cherche donc à se débarrasser du dossier, ce qu'elle peut faire de deux façons :

– ou bien le donner à un autre cadre de son service choisi uniformément (toutes les personnes d'un même service se connaissent),
– ou bien le faire sous-traiter par un autre service dont elle est responsable (le dossier est alors donné à un cadre de ce service, choisi uniformément).

On suppose que la propension de chaque cadre à choisir (s'il en a la possibilité !) l'une de ces deux options est constante. On s'intéresse à la probabilité se faire remercier, c'est-à-dire la probabilité d'avoir le dossier sensible. Comme sa découverte par la presse va prendre du temps, on ne considère que le comportement asymptotique des mouvements du dossier. Voici la liste des cadres de la multinationale :

personne	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
membre des services	1	1	1	2	2	2,3	3	4	4	5	5	5
responsable des services	1	2 3	3	4			5					
propension à sous-traiter	0,4	0,5 0,5	0,7	0,4	0	0	0,9	0	0	0	0	0

1. Donner le graphe de transition des mouvements du dossier.
2. Y a-t-il des personnes à l'abri ? Si oui, pourquoi ? Comment les caractériser ?
3. Peut-on simplifier la chaîne de Markov ? Si oui, pourquoi ?
4. Donner une présentation matricielle du problème et y répondre (on admet la convergence de la chaîne de Markov).
5. On suppose que chaque service possède une secrétaire. Lors d'un transfert de dossier, le cadre qui gère le dossier choisit à quel service le renvoyer (le sien ou l'un des ceux dont il est responsable) et c'est la secrétaire du service concerné qui fait l'attribution (uniforme) au sein du service. Comment est modifiée la chaîne de Markov ? Quelle nouvelle propriété a-t-elle ? Peut-on adapter l'analyse précédente ?