TD 3 : Simulation et modélisation

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Convergences de variables aléatoires

Exercice 1

1. Rappeler les trois notions de convergence en théorie des probabilités et les illustrer par des dessins explicatifs.
2. Donner un contre-exemple pour chacune des implications fausses.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire X.
A-t-on $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{E}(X)$?

2 Simulation de variables aléatoires

Exercice 3 (Méthode de l'inverse)

1. Rappeler comment générer une variable aléatoire de loi donnée f à partir d'un générateur uniforme sur $[0, 1]$ par la méthode de l'inverse.
2. L'appliquer pour générer une variable aléatoire sur $\mathbb{R}$ de densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.
3. Peut-on l'appliquer pour générer une variable aléatoire de loi normale centrée réduite ?

Exercice 4 (Méthode du rejet)

1. Rappeler le principe de la méthode du rejet.
2. Donner la loi en sortie en fonction de la loi en entrée et de la probabilité de la condition d'arrêt.
3. Quel est l'espérance du temps de convergence ?
4. Soit f et g des densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ telles qu'il existe c vérifiant $\forall x, f(x) \leqslant cg(x)$.
   Si X est une variable aléatoire de loi g et U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la loi de X conditionné par $\{cUg(X) < f(X)\}$?
5. Utiliser cette méthode pour générer une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Exercice 5 (Méthode de l'alias)

On s'intéresse à présent à la génération de variables aléatoires discrètes à support fini.

1. Donner un algorithme qui génère une telle variable aléatoire en un temps logarithmique en le nombre de valeurs possibles.
2. Montrer que toute variable aléatoire discrète prenant n valeurs distinctes peut s'écrire comme une somme équiprobable de n variables de Bernoulli.
3. En déduire un algorithme qui résout le problème.

3 Introduction aux schémas de Matthes

Exercice 6 (Canal de communication en isolation)

Des paquets sont soumis pour transmission à un canal de communication muni d'une mémoire de taille infinie.

- Les dates d'arrivée des paquets au canal forment un processus de Poisson homogène d'intensité λ (c'est-à-dire que les variables aléatoires qui représentent les temps inter-arrivées des paquets sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre λ). On suppose que le premier paquet arrive à l'instant 0.
- Les paquets sont de taille aléatoire et les durées de transmission des paquets sont des variables aléatoire indépendantes identiquement distribuées de fonction de répartition F sur $\mathbb{R}^+$, indépendantes du processus de Poisson des arrivées. On suppose que $F(0) = 0$.
- À leur arrivée, les paquets sont stockés dans la mémoire. Ils sont transmis dès que possible par le canal, un par un, dans l'ordre d'arrivée.

Pour représenter l'évolution d'un tel système, on définit une *variable d'état* du système, qui donne à tout instant t, le nombre $X(t) \in \mathbb{N}$ de paquets en attente ou en cours de transmission.

Afin de définir les transitions possible de cette variable d'état, on introduit deux *sources*, α pour les arrivées et β pour les départs :

- si l'état courant est 0, seule la source α est *active*, ce qui signifie que le seul événement possible est une arrivée qui fait croître la variable d'état d'une unité ;
- si l'état courant est $i > 0$, les sources α et β sont toutes deux actives, et suivant les circonstances on peut avoir un événement de type α (comme ci-dessus) ou un événement de type β qui fait décroître la variable d'état d'une unité.

Soit $A(i)$ l'ensemble des sources actives dans l'état i. Pour déterminer quelle source parmi celles qui sont actives dans un état donné génère un événement la première, on associe à chaque source une variable de *durée résiduelle* au temps t, à savoir $Y_\alpha(t)$ et $Y_\beta(t)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, qui donne la durée qui sépare t du prochain événement de type α et β respectivement.

1. Faire un schéma représentant la situation.
2. À quoi correspond l'hypothèse $F(0) = 0$?
3. Donner un algorithme de simulation qui calcule pas à pas l'évolution de ce système.