TD 1 & 2 – Rappels de probabilités

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Probabilités discrètes

1.1 Calcul de probabilités

Exercice 1

Soient A et B des événements de probabilités $\mathbb{P}(A) = 3/4$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Montrez que $1/12 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant 1/3$.
2. Donnez des exemples qui réalisent ces bornes.
3. Donnez des bornes similaires pour $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 2

Étant donnés deux évènements A et B, quelle est la probabilité $\mathbb{P}(A \,\Delta\, B)$ que exactement l'un des deux évènements survienne ?

Exercice 3

On lance une pièce de monnaie une infinité de fois.

1. Montrez que face tombera à un moment ou un autre, avec probabilité 1.
2. Idem pour toute séquence finie de pile et de face.

Exercice 4

Trouvez une famille d'événements telle que :
- les événements sont deux à deux indépendants
- la famille n'est pas indépendante dans son ensemble.

Exercice 5

Soit $A_1, ..., A_n$ ($n \geqslant 2$), des évènements. Montrez l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}\Big(A_i \cap A_j\Big) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}\Big(A_i \cap A_j \cap A_k\Big) - \cdots + (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Exercice 6

Soient $(A_n)_{n\geqslant 1}$ des évènements presque certains (*i.e.* tels que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout n). Montrez que $\mathbb{P}(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n) = 1$.

Exercice 7

Soient A et B deux évènements indépendants. Montrez que $\overline{A}$ et B sont indépendants. Idem pour $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 8

On considère un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux rois et un as dans une main de 13 cartes ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un as dans une main de 13 cartes, sachant qu'elle contient exactement deux rois ?

Exercice 9 (Formule de Bayes)

1. Donnez deux formulations distinctes de $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Énoncez la formule de Bayes pour $\mathbb{P}(A \mid B)$, puis détaillez-la en partitionnant B avec A et $\overline{A}$.

1.2 Paradoxes

Exercice 10 (Paradoxes des anniversaires)

1. Dans un groupe de m personnes, quelle est la probabilité que deux personnes aient le même jour de naissance ?
2. A partir de quelle valeur de m cette probabilité est-elle plus grande que 1/2 ?

Exercice 11 (Les deux enfants)

Une famille a deux enfants, dont au moins un est une fille.

1. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
2. Donnez une autre réponse possible à la question précédente.
3. Expliquez pourquoi les deux réponses sont correctes.

Exercice 12 (Les trois pièces)

On lance trois pièces de monnaie. Au moins deux sont du même côté. En regardant la troisième, il y a une chance sur deux que les trois pièces soient du même côté. Expliquez ce phénomène.

Exercice 13 (Paradoxe de Saint-Pétersbourg)

Contre une certaine mise initiale, on joue au jeu suivant : On tire à pile ou face. Si c'est face la banque paye 1 euros et on stoppe le jeu, si c'est pile on relance. Si c'est face la banque paye 2 euros et on stoppe le jeu, si c'est pile on relance pour 4 euros, *etc*. Quelle doit être la mise initiale pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 14 (Paradoxe du Monty Hall)

Dans un jeu télévisé, pour gagner une voiture un candidat doit choisir entre trois portes. Deux d'entre elles sont vides et la troisième contient la voiture. Après que le candidat a choisi une porte, le présentateur ouvre l'une des deux autres qui ne contient rien. On propose alors au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

Exercice 15 (Problème de la Belle au bois dormant)

On joue avec la Belle au bois dormant qui connaît tout le protocole suivant. L'expérience dure de dimanche soir à mercredi. Elle se couche le dimanche soir et on tire une pièce équilibrée à pile ou face.

- Si c'est pile, on réveille la Belle le lundi pour un entretien.
- Si c'est face, on la réveille le lundi et le mardi, chaque fois pour un entretien.

Comme elle est toujours très ensommeillée, la Belle ne sait ni quel jour on est ni ne se souvient de ce qu'elle a fait la veille. Lors de chaque entretien (que la Belle ne sait pas distinguer), on lui demande "A votre avis, quelle est la probabilité que face soit tombé dimanche ?". Que doit répondre la Belle ?

1.3 Opérateurs de probabilités

Exercice 16

1. A-t-on toujours $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ pour X et Y variables aléatoires réelles ?
2. Idem pour $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.
3. Préciser sous quelle condition la première égalité est vraie (et le démontrer !).

Exercice 17

On rappelle la définition de la variance pour une variable aléatoire X : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.

1. Montrez qu'elle est égale à $\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.
2. Montrez que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
3. Donner un contre-exemple lorsque la condition précédente n'est pas satisfaite.

Exercice 18

On rappelle que la fonction génératrice des moments pour une variable aléatoire réelle X est définie par $M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.

1. Montrez que $M_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X^k\right) \frac{t^k}{k!}$.
2. Montrez que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

2 Lois classiques

2.1 Lois discrètes

Exercice 19

On lance une pièce biaisée qui a une probabilité p de tomber sur pile. La *loi de Bernoulli* (de paramètre p) $\mathcal{B}(p)$ est la loi du nombre de pile obtenu sur un lancer.

1. Détailler cette loi.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer sa fonction génératrice des moments.

Exercice 20

On reprend la pièce de l'exercice précédent mais on la lance n fois. On compte toujours le nombre de pile.

1. Donner la loi de cette variable aléatoire X_n, appelée *loi binomiale* de paramètres n et p et notée $\mathcal{B}(n, p)$.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer sa fonction génératrice des moments.

Exercice 21

On passe à présent à un très grand nombre de lancers de pièces. On va donc s'intéresser au comportement asymptotique lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Si p reste constant X_n va tendre vers $+\infty$. On va donc supposer que p tend vers 0 et plus précisément que np reste constant.

1. Montrer que dans ce cas, la loi binomiale tend vers la *loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ (définie sur $\mathbb{N}$) donnée par $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \lambda > 0$.
2. Vérifier que la loi de Poisson est bien une loi de probabilité.
3. Calculer l'espérance et la variance de cette loi.
4. Calculer sa fonction génératrice des moments.
5. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 22

Plutôt que de compter le nombre de piles pour n lancers, on décide à présent de considérer le nombre de lancers nécessaires pour voir apparaître la première occurrence de pile.

1. Donner la loi de cette variable aléatoire Y qu'on appelle *loi géométrique* de paramètre p.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer sa fonction génératrice des moments.
4. Montrez que la loi géométrique est sans mémoire : pour tous n et k dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n + k \mid Y > k) = \mathbb{P}(Y = n)$.

2.2 Lois continues à densité

Exercice 23

On considère la *loi exponentielle* de paramètre λ, définie par la densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Montrez que la loi exponentielle est *sans mémoire*, *i.e.* $\mathbb{P}(X \geqslant a + b \mid X \geqslant b) = \mathbb{P}(X \geqslant a)$ pour tout a et b dans $\mathbb{R}^+$.
4. Montrez réciproquement que toute loi à densité sans mémoire est exponentielle.

Exercice 24

La *loi normale* de paramètre m et σ^2 (notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$) et définie sur $\mathbb{R}$ a pour densité $f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Si X et Y suivent des lois normales indépendantes de paramètres respectifs (m_1, σ_1^2) et (m_2, σ_2^2), montrez que $X + Y$ suit une loi normale de paramètre $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
4. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, calculer la probabilité que X soit compris entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$ (on donne $F_X(2) \approx 0,97725$).