Partiel d'Évaluation de Performance

mercredi 9 novembre 2011

1 Génération d'une variable aléatoire

On se donne un générateur aléatoire à valeurs dans $[1, +\infty[$ de loi $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Détailler comment générer une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1]$ à partir de ce générateur.
2. De même pour une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2 Schéma de Matthes

on considère K stations partageant un même canal de communication. Les messages ont tous le même temps de transmission δ et, lorsqu'ils arrivent dans une station (avant leur envoi), ils sont stockés dans un buffer qu'on suppose de taille illimité, en attendant que la station finisse la transmission en cours (lorsqu'il y en a une). On ignore les conflits de transmission en supposant que le canal peut transmettre simultanément un nombre arbitraire de messages. Les messages à envoyer apparaissent dans la k^e station suivant un processus de Poisson de paramètre λ_k. Une fois envoyés, les messages disparaissent du système (ils sont reçus par la station de destination). On s'intéresse au nombre de messages en attente dans le système à tout instant.

Donner le schéma de Matthes de ce système.

3 Chaîne de Markov finie

Étudiez le comportement asymptotique de la chaîne de Markov homogène dont la matrice se trouve ci-après. Préciser quels sont les états transcients et récurrents ainsi que les classes de communication et les classes cycliques de la chaîne. Les entrées vides sont des zéros. On utilise ici la matrice avec les notations des probabilistes, c'est-à-dire qu'une étape de transition s'effectue par πP et non $P\pi$.

$$\begin{pmatrix}
1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & & & & & \\
1/4 & & 1/4 & 1/4 & & & & & 1/4 \\
& 1/3 & & & 1/3 & & & 1/3 & \\
& & & & 2/3 & & 1/3 & & \\
& & & 1/2 & & 1/2 & & & \\
& & & & 5/6 & & 1/6 & & \\
& & & 1/2 & & 1/2 & & & \\
& & & & & & & 1/3 & 2/3 \\
& & & & & & & 1 &
\end{pmatrix}$$

4 Comparaison de deux politiques de partage d'un canal

Un canal de communication est partagé entre $K > 1$ classes d'utilisateurs. Les utilisateurs de classe k génèrent un trafic i.i.d. de A_n^k paquets dans la case de temps n. Les trafics générés par les diverses classes sont indépendants.

Les deux politiques suivantes sont considérées :

a) La case de temps n est attribuée à la classe k avec probabilité p_k (et bien sûr la condition $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$), les attributions étant indépendantes pour des cases différentes, et indépendantes des variables décrivant le trafic généré. Dans ce cas, un paquet de classe k est transmis s'il y a des paquets de cette classe en attente au début de la case et cette dernière n'est pas utilisée sinon.

b) La case n est attribué de manière équiprobable à l'une des classes ayant des paquets en attente au début de la case.

Soit X_n^k le nombre de paquets de classe k en attente au début de la case n et soit X_n le vecteur $(X_n^1, \ldots, X_n^K)$.

1. Donner, pour chaque politique, des représentations du vecteur X_n de la forme $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$, où ξ_n est une suite i.i.d. et f est une fonction de $\mathbb{N}^K \times E$ dans $\mathbb{N}^K$ pour un E bien choisi. Ceci suffit à montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{N}^K$.
2. Montrer que si pour tout k, $p_k > 0$, $\mathbb{P}\left(A_0^k = 0\right) > 0$ et $\mathbb{P}\left(A_0^k = l\right) > 0$ pour un $l \geqslant 1$ qui ne dépend pas de k, alors il y a irréductibilité.
3. Pour la seconde politique, montrer que la chaîne est récurrente positive si

$$\sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left(A_0^k\right) < 1.$$

   Indication : On pourra utiliser le premier théorème de Foster.
4. Montrer que pour la première politique, il ne peut y avoir récurrence positive s'il existe un k tel que $\mathbb{E}\left(A_0^k\right) \geqslant p_k$.
5. (bonus) Montrer que pour la première politique, il ne peut y avoir récurrence s'il existe un k tel que $\mathbb{E}\left(A_0^k\right) > p_k$.