TD 11 : Réseaux de Pétri

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Définition (Réseau de Pétri)

Un *réseau de Pétri* est la donnée d'un graphe orienté biparti $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, E)$ et d'une fonction $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$.

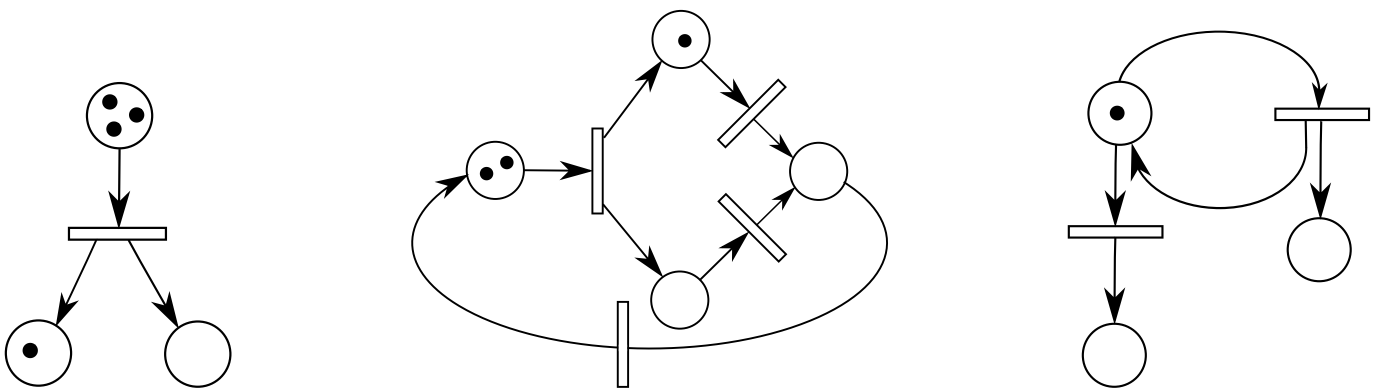
Les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés les *places* et ceux de $\mathcal{T}$ les *transitions*. On note $^\bullet t$ et $t^\bullet$ respectivement les voisinages négatifs et positifs d'une transition. On définit de manière analogue $^\bullet p$ et $p^\bullet$. Lorsque chaque place a au plus une transition antécédent et une transition successeur, le réseau est un *graphe d'événements* et on peut noter $^\bullet p$ et $p^\bullet$ les uniques transitions précédant et suivant la place p si elles existent. La quantité $\mu(p)$ est appelé *marquage* (initial) de p. Elle dénote le nombre de *jetons* présents dans la place p. On représente graphiquement les places par des cercles contenant des jetons et les transitions par des rectangles.

Définition (Évolution d'un réseau de Pétri)

Un réseau de Pétri *évolue* par déplacement des jetons entre les places selon les transitions. Plus précisément, une transition t est *franchissable* si $\forall p \in {}^\bullet t, \mu(p) \geqslant 1$ et on effectue une telle transition (on dit qu'on *tire* la transition) en retirant un jeton de toutes les places de $^\bullet t$ et ajoutant un jeton dans toutes les places de $t^\bullet$.

Exercice 1

Donner l'évolution des réseaux de Pétri suivants. Quelles propriétés les distinguent ?



Exercice 2

Construire des réseaux de Pétri qui effectuent les opérations suivantes. Dans la mesure du possible, essayer de se restreindre aux graphes d'événements.

1. choix non déterministe
2. addition du nombre de jetons situés dans deux places
3. soustraction d'une constante
4. multiplication par une constante
5. division par une constante
6. un compteur binaire
7. le schéma d'attente d'une file G/D/1 et d'une file G/D/C
8. un réseau de Jackson fermé cyclique (lorsqu'on quitte on file, on entre dans la suivante)

Exercice 3 (Réseaux de Pétri bornés)

Un marquage est dit *accessible* s'il existe une évolution du réseau de Pétri vers ce marquage. Un réseau de Pétri est dit M-borné si le nombre de jetons dans chaque place ne peut dépasser M.

1. Comment caractériser les réseaux M-bornés en terme de marquages accessibles ?
2. En déduire un algorithme pour déterminer si un réseau de Pétri est M-borné. Quel est sa complexité ?
3. Déterminer une transformation entre réseaux de Pétri qui force une place d'un réseau général à être M-bornée. Justifier la correction de la transformation.

Exercice 4 (Récurrence (max,plus)-linéaire et graphe d'événements temporisé)

On considère une récurrence (max,plus)-linéaire matricielle dont la forme générale est :

$$X_n = A_0 \otimes X_n \oplus A_1 \otimes X_{n-1} \oplus \cdots \oplus A_K \otimes X_{n-K}$$

où les X_i sont des vecteurs et les A_j sont des matrices sur le semi-anneau (max,plus).

1. Par analogie avec le cas des récurrences n-linéaires usuelles, exprimer cette récurrence sous forme d'une chaîne de Bellman, *i.e.* d'une récurrence à un pas. On peut voir les chaînes de Bellman comme l'analogue des chaînes de Markov pour les semi-anneaux. Quelle hypothèse faut-il faire sur A_0 ?
2. Rappeler l'équation (max,plus) qui permet de calculer le dateur $d_\tau(n)$ qui donne la date du n^e tirage de la transition τ. De même, donner l'équation (min, plus) qui exprime le compteur $n_\tau(t)$ donnant le nombre de tirages de la transition τ dans l'intervalle $[0, t]$.
3. Réciproquement, comment associer un graphe d'événements temporisé à une récurrence (max,plus)-linéaire ? On rappelle qu'un *graphe d'événements temporisé* est un graphe d'événements muni d'une *fonction de retard* $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$. L'apparition d'un jeton dans la place p lorsqu'on tire la transition ${}^\bullet p$ est alors retardée de $\sigma(p)$.
4. Les équations précédentes définissent une récurrence (max,plus) linéaire matricielle pour le dateur et (min, plus) pour le compteur. Le comportement asymptotique d'une chaîne de Bellman est donné par le résultat suivant :

   $$\text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R}^+,\ d \in \mathbb{N} \text{ et } N \in \mathbb{N} \text{ tels que pour tout } n \geqslant N,\ A^{\otimes(n+d)} = \lambda d \otimes A^{\otimes n}.$$

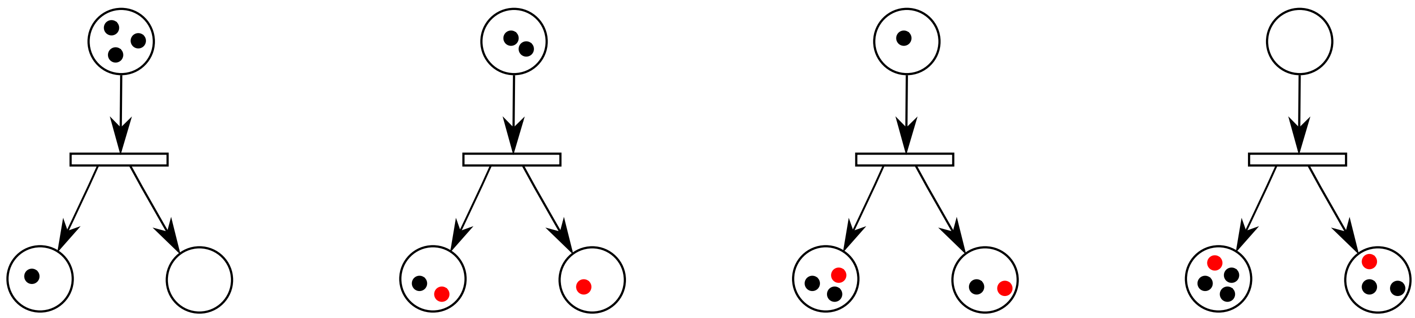
   Comment ce résultat se traduit-il concrètement pour le graphe d'événements temporisé dont le dateur est décrit par la matrice A ?
5. En examinant les « transitions limitantes » du graphe d'événements, donner la signification des paramètres λ, d et N dans le résultat de la question précédente.

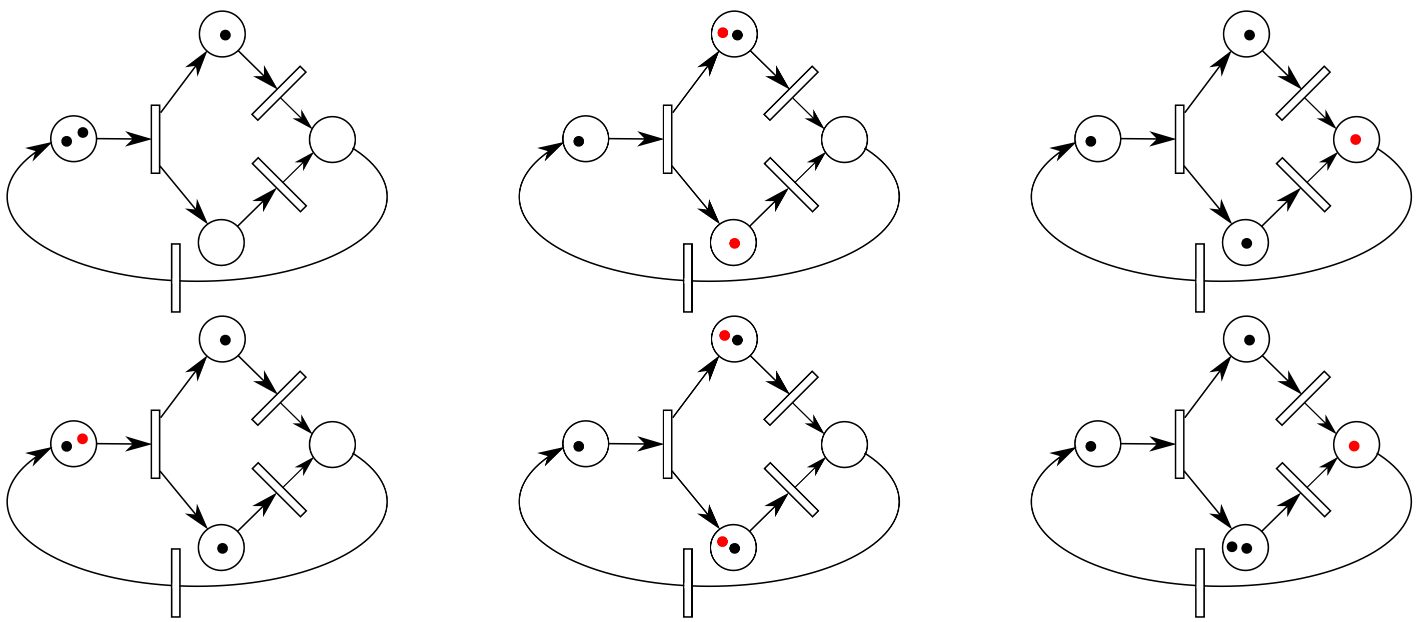
Exercice 5 (Accessibilité)

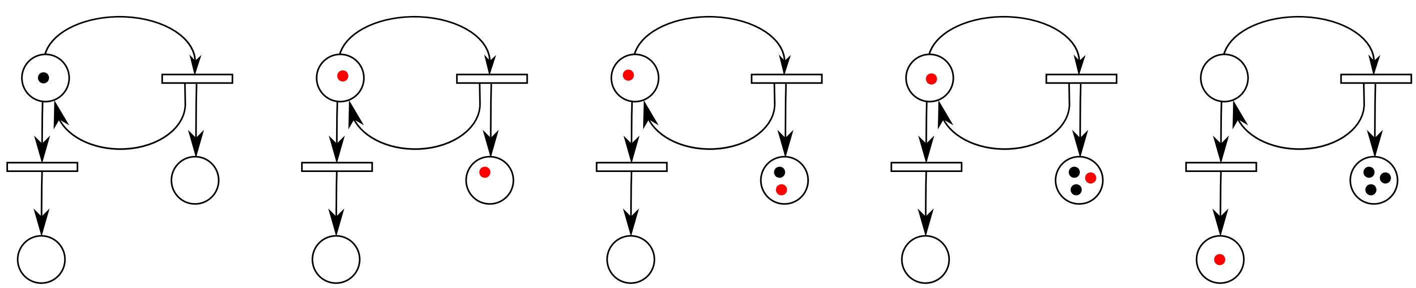
1. Dans le cas général, le problème de l'accessibilité est EXPSPACE-difficile. Donner un semi-algorithme pour le résoudre.
2. Montrer que si l'on retire la contrainte de positivité du marquage, alors on peut résoudre le problème de l'accessibilité en temps polynomial avec des outils d'algèbre linéaire. En déduire une méthode de preuve d'inaccessibilité.

Solutions

▸ Exercice 1

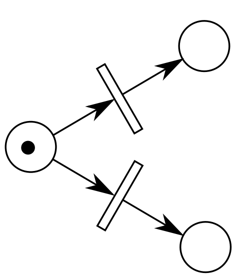




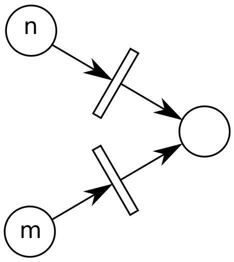


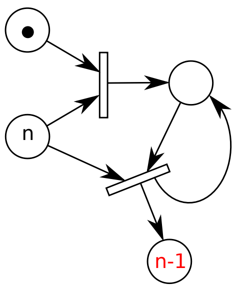
Leurs différences sont :
- la présence ou l'absence d'interbloquages (l'existence d'une exécution infinie)
- l'existence ou non de concurrence (plusieurs transitions qui s'excluent mutuellement)
- l'explosion du nombre de jetons

▸ Exercice 2

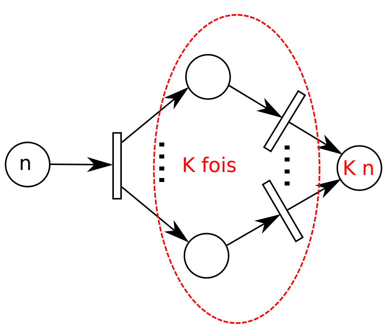


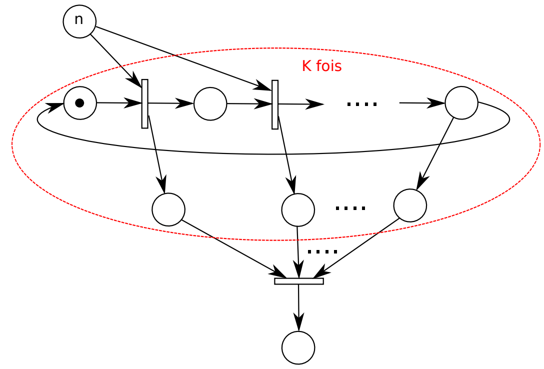
1.

2. 

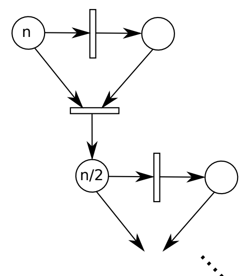
3. 

Il suffit de savoir faire la décrémentation (ci-dessus) puis d'itérer.

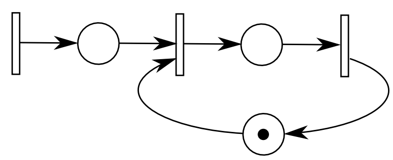
4. 

5. 

Si on renverse simplement les arcs de la multiplication, on obtient un réseau qui peut effectuer la division mais pas sur toutes ses exécutions. On utilise donc un jeton circulant pour n'autoriser qu'une unique transition à chaque étape.

6. 

On utilise une succession de division par deux. Le jeton circulant devient alors un cas particulier de la méthode de l'exercice 3 pour borner une place.

7. 

On ne représente ici que deux contraintes :
– une unique personne par serveur
– les arrivées sont exogènes d'où l'utilisation d'une transition sans prédécesseur (*transition de contrôle*) qui peut donc être tirée à tout instant

8. La sortie d'une file est l'entrée de la suivante donc il n'y a pas besoin de transition de contrôle.

▸ **Exercice 3**

1. Les réseaux de Pétri bornés n'ont qu'un nombre fini de marquages accessibles, borné par $(M+1)^{|\mathcal{P}|}$.
2. Il suffit de calculer l'ensemble des configurations accessibles. Si cet ensemble est de cardinal trop grand ou qu'une coordonnée d'un marquage accessible dépasse la borne, alors il n'est pas M-borné. En fait, la seconde condition se produira toujours avant la première (ou au pire au même moment), de sorte qu'elle est suffisante pour définir l'algorithme.
3. Pour chaque place p, on ajoute une contre-place $\overline{p}$ telle que $t \in {}^\bullet\overline{p} \iff t \in p^\bullet$ et $t \in \overline{p}^\bullet \iff t \in {}^\bullet p$, *i.e.* on inverse le sens d'interaction des transitions voisines de p. Le marquage initial de $\overline{p}$ vaut $\mu_0(\overline{p}) = M - \mu_0(p)$. On a alors l'invariant $\mu(p) + \mu(\overline{p}) = M$ et la condition de positivité d'un marquage assure la M-bornitude.

▸ **Exercice 4**

1. La méthode usuelle de résolution des systèmes n-linéaires consiste à isoler x :

$$(1-a_0)x_n = a_1 x_{n-1} \cdots + a_K x_{n-K} \qquad \iff \qquad x_n = \overline{a}_1 x_{n-1} \cdots + \overline{a}_K x_{n-K}$$

avec $\overline{a}_i = (1 - a_0)^{-1} a_i$. Dans ce cas, on représente les x_i par un vecteur $X = (x_n, \ldots, x_{n-K+1})$. L'équation se représente matriciellement par $X_{n+1} = AX_n$ avec A la matrice compagnon des $\overline{a}_i$:

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_1 & \ldots & \ldots & \overline{a}_K \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Évidemment, cela s'étend sans difficulté au cas où les a_i sont des matrices et les x_i des vecteurs.
Dans le cas des semi-anneaux, il faut veiller à ne pas faire de soustraction. Ainsi, $(I - A_0)^{-1}$ s'écrit plutôt $A_0^* = \sum_{k \geqslant 0} A_0^k$, sous réserve que cela aie un sens. Il faut par exemple que A_0 soit triangulaire stricte, donc nilpotente, ce qui assure la convergence de la série. Au final, on obtient une matrice compagnon (pour la multiplication à gauche) dont les coefficients intéressants sont les $\overline{A}_i = A_i A_0^*$:

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_1 & 0 & -\infty & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & -\infty & & 0 \\ \overline{A}_K & & & \end{pmatrix}$$

2. Dans les deux cas, c'est la recherche du « jeton limitant » qui permet de trouver les équations.

$$d_p(\tau) = \max_{p' \in {}^{\bullet\bullet}p} \{d_{p'}(n - \mu(p)) + \sigma(p)\} \qquad\qquad n_\tau(t) = \mu(p) + \min_{p' \in {}^{\bullet\bullet}p} \{n_{p'}(t - \sigma(p))\}$$

3. L'originalité de cette traduction réside dans le fait que les états de la récurrence sont représentés par les transitions du graphe d'événements et les transitions de la récurrence (*i.e.* les coefficients différents de $-\infty$) par les places.
   - coordonnée k $\rightsquigarrow$ transitions t_k
   - coefficient $(A_m)_{ij} \neq \varepsilon$ $\rightsquigarrow$ place p_{mij}
   - un arc $t_i \to p_{mij}$ et un arc $p_{mij} \to t_j$
   - le marquage initial $\mu(p_{mij}) = m$
   - le retard $\sigma(p_{mij}) = (A_m)_{ij}$ (s'il est positif ou nul)
4. Ce résultat signifie que les tirages d'une même transition suivent un motif qui se répète selon une progression arithmétique.
5. On suppose que le graphe d'événements est fortement connexe, sinon de la même manière que pour les chaînes de Markov, on peut le décomposer en composante asymptotiquement indépendantes. Le régime permanent fait transiter des jetons de façon périodique car le graphe est fortement connexe et car les transitions sont tirées dès qu'elles sont disponibles. Le résultat indique que hors d'un régime transitoire (d'où le N), l'augmentation du temps sur une période d vaut λd avec λ l'augmentation moyenne maximale.

   On veut donc déterminer la période d du graphe et l'augmentation moyenne du temps pendant cette période. Les cycles qui ralentissent l'évolution du système sont ceux de poids moyen maximum car c'est ceux qui retardent le tirage d'une transition (*cf* question 2). On note λ ce poids moyen maximum.

   Pour calculer la période, on considère le graphe critique (*i.e.* le graphe induit par les cycle de poids moyen maximum), car ce sont les cycles limitants. Pour chaque composante connexe dans ce graphe critique, la période est le pgcd des longueurs de ses cycles. En effet, les temps de retour sont de la forme $l_1\mathbb{N} + \cdots + l_k\mathbb{N}$ où les l_i sont les longueurs des cycles. Si l'on avait $\mathbb{Z}$ à la place de $\mathbb{N}$, ce serait directement $pgcd(l_1, \ldots, l_k)\mathbb{Z}$. Le fait d'avoir $\mathbb{N}$, impose un régime transitoire : $A + N + pgcd(l_1, \ldots, l_k)\mathbb{N}$ où les valeurs avant N forment un ensemble fini A, mais le comportement asymptotique reste néanmoins le même. Pour avoir la période sur tout le graphe critique, il suffit de prendre le ppcm des périodes de chaque composante.

   Le paramètre N est le max des N de chaque composante critique et permet d'ignorer le régime transitoire.

► Exercice 5

1. On calcule le graphe des marquages accessibles (en largeur, pas en profondeur) et on y recherche le marquage considéré.
2. Soit M la matrice de taille $|\mathcal{P}| \times |\mathcal{T}|$ dont le terme $m_{i,j}$ est $+1$ si $t_j \in {}^\bullet p_i$ et -1 si $t_j \in p_i^\bullet$ (et 0 sinon ou si $t_j \in {}^\bullet p_i \cap p_i^\bullet$). Dans ce cadre, tirer la transition t_j correspond à ajouter Me_j au vecteur $\overline{\mu} = (\mu(p_1), \ldots, \mu(p_{|\mathcal{P}|}))$. Déterminer si l'on peut passer de $\overline{\mu}_1$ à $\overline{\mu}_2$ revient à résoudre le système linéaire $MX = \overline{\mu}_2 - \overline{\mu}_1$, ce qui peut se faire en temps cubique.

   On peut remarquer que la matrice M ne caractérise pas le réseau de Pétri, au contraire des matrices binaires de pré- et post-incidence M^- et M^+, de taille $|\mathcal{P}| \times |\mathcal{T}|$ et qui contiennent un 1 lorsque $t_j \in {}^\bullet p_i$ (resp. $t_j \in p_i^\bullet$). On a par ailleurs, $M = M^+ - M^-$.