TD 8 : File M/M/1

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Exercice 1 (Processus de Poisson et base de données)

Une base de données peut recevoir deux types de consultations : des lectures et des écritures qui se produisent selon des processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_R et λ_W.

1. Quelle est la probabilité que l'intervalle de temps entre deux lectures soit plus grand que t ?
2. Quelle est la probabilité que le prochain événement soit une lecture ?
3. Quelle est la probabilité qu'au plus n écritures se produisent dans l'intervalle de temps $[0, t[$?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 événements (lecture ou écriture) se produisent dans l'intervalle de temps $[0, t[$?

Exercice 2 (Distribution de la taille de la file)

On étudie une file d'attente M/M/1 avec un serveur et une capacité infinie. Les temps d'inter-arrivées et de service sont choisis exponentiels de paramètres respectifs λ et μ. On pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ le taux d'utilisation du serveur. Le nombre de clients dans la file, noté $N(t)$, est une chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Décrire le schéma de Matthes de cette file.
2. Déterminer le générateur infinitésimal de la chaîne.
3. Donner la condition de stabilité de la file et la démontrer à l'aide des théorèmes de Foster.
4. Calculer l'unique distribution stationnaire $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cette chaîne.
5. Faire de même en utilisant la fonction génératrice.
6. Retrouver ce résultat en résolvant la récurrence linéaire obtenue en écrivant l'équation d'équilibre pour un état.
7. Donner l'espérance L du nombre de clients dans le système. La représenter graphiquement.
8. Donner l'espérance L_q du nombre de clients dans la file. Comment L et L_q sont-il reliés ?

Exercice 3 (Distribution du temps d'attente)

On reprend la file de l'exercice précédent.

1. Pourquoi ne peut-on pas donner directement la distribution du temps d'attente ?

On fait désormais l'hypothèse d'une politique de service PAPS (premier arrivé, premier servi). On note T_q la variable aléatoire qui dénote le temps d'attente d'un client dans la file et $W_q(t)$ sa fonction de répartition.

2. Quelle est la probabilité q_n qu'un client arrive dans la file et trouve n personnes devant lui ? Est-ce le cas pour une file générale ?
3. La variable aléatoire T_q est-elle discrète ? à densité ? Quelle est la valeur de $W_q(0)$?

Le temps de service de n clients suit une distribution d'Erlang de paramètres n (paramètre de forme) et μ (paramètre d'intensité) dont la fonction de densité est

$$E(k, \lambda, x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(k-1)!}.$$

4. En utilisant la formule des probabilités totales, donner une expression pour $W_q(t)$.
5. Donner l'espérance W_q de T_q.
6. Adapter les deux questions précédentes pour traiter le cas de T, le temps de séjour total dans le système.
7. Quelle relation y a-t-il entre L_q et W_q d'une part, et L et W d'autre part ?

Solutions

► **Exercice 1** Notons t_R et t_W les temps inter-arrivées des processus de lecture et écriture respectivement.

1. Comme il s'agit d'un processus de Poisson, le temps inter-arrivée suit une distribution exponentielle de paramètre λ_R. On en déduit $\mathbb{P}(t_R > t) = 1 - F_{\mathcal{P}(\lambda_R)}(t) = e^{-\lambda_R t}$.
2. Par le caractère sans mémoire des processus de Poisson, on s'intéresse à $\mathbb{P}(t_R < t_W)$ qui ne dépend pas du dernier événement.
$$\mathbb{P}(t_R < t_W) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t<t'} \cdot \lambda_R e^{-\lambda_R t} \cdot \lambda_W e^{-\lambda_R t'} \, dt \, dt' = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_W t} \cdot \lambda_R e^{-\lambda_R t} \, dt = \lambda_R \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_R+\lambda_W)t} \, dt = \frac{\lambda_R}{\lambda_R + \lambda_W}$$
3. Notons $N_W(t)$ le nombre d'écriture dans l'intervalle $[0,\ t[$. Il suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_W t$. On a donc $\mathbb{P}(N_W(t) = i) = \frac{(\lambda_W t)^i}{i!} e^{-\lambda_W t}$. Ainsi, $\mathbb{P}(N_W(t) \leqslant n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda_W t)^i}{i!} e^{-\lambda_W t}$.
4. La somme de deux lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres. Ainsi, $N(t) = N_R(t) + N_W(t)$ est une loi de Poisson de paramètre λt avec $\lambda = \lambda_R + \lambda_W$. D'où on tire
$$\mathbb{P}(N(t) \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(N(t) = 0) - \mathbb{P}(N(t) = 1) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t).$$
Plus généralement, la fusion de deux processus de Poisson indépendant est un processus de Poisson.

► **Exercice 2**

1. On a :
   - $\mathcal{E} = \mathbb{N}$ (le nombre de clients en attente dans la file),
   - $\mathcal{S} = \{in, out\}$,
   - $c(\alpha, \iota) \equiv 1$,
   - $\mathcal{A}(0) = \{in\}$ et $\mathcal{A}(n+1) = \{in, out\}$,
   - $p(in, n, n+1) = 1$ et $p(out, n+1, n) = 1$
   - $F_{in}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $F_{out}(t) = 1 - e^{-\mu t}$
2. le générateur infinitésimal Q est donné par les formules $q_{ii} = -(\lambda + \mu)$, $q_{i+1,i} = \lambda$ et $q_{i-1,i} = \mu$. Il vérifie $1 \cdot Q = 0$.
3. La condition est $\rho < 1$. Pour appliquer les théorèmes de Foster, on prend $h = Id$, $F = \{0\}$ ou $F = \emptyset$, $\varepsilon = -\mu(\rho - 1)$ et $M = 1$.
4. On utilise la méthode de la coupure : à l'équilibre, la probabilité d'être dans les n premiers états est invariante donc ce qui en sort égale ce qui en entre. On en déduit : $\mu\pi_n = \lambda\pi_{n+1}$, *i.e.* $\pi_{n+1} = \rho\pi_n$. C'est valable pour tout n d'où $\pi_n = \rho^n \pi_0$. La condition de normalisation $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi_n = \pi_0 \frac{1}{1-\rho} = 1$ permet d'obtenir $\pi_0 = 1 - \rho$. On vérifie qu'elle est bien stationnaire avec la caractérisation $Q\pi = 0$:
$$(Q\pi)_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} q_{ij}\pi_i = \lambda(1-\rho)\rho^{i-1} - (\lambda+\mu)(1-\rho)\rho^i + \mu(1-\rho)\rho^{i+1} = (1-\rho)\rho^i(\lambda\rho^{-1} - (\lambda+\mu) + \mu\rho) = (1-\rho)\rho^i(\mu - (\lambda+\mu) + \lambda) = 0$$
Enfin, l'unicité est assurée par l'irréductibilité de la chaîne.
5. L'équation d'équilibre de l'état $n \geqslant 1$ est $\mu p_{n+1} - (\lambda+\mu)p_n + \lambda p_{n-1} =$ qui, en divisant par μ, se réécrit $p_{n+1} = (\rho+1)p_n - \rho p_{n-1}$. En multipliant cette égalité par z^n, on obtient $z^{-1}p_{n+1}z^{n+1} = (\rho+1)p_n z^n + z p_{n-1} z^{n-1}$. En sommant cette équation pour $n \geqslant 1$, on trouve $z^{-1}(G(z) - p_0 - zp_1) = (\rho+1)(G(z) - p_0) - \rho z G(z)$ où $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} p_n z^n$ est la fonction génératrice de la loi des p_n. L'équation d'équilibre de l'état 0 donne $p_1 = \rho p_0$. En injectant cette égalité et en résolvant selon $G(z)$, on trouve $G(z) = \frac{p_0}{1-\rho z}$. En utilisant le fait que $G(1) = \sum_{n\geqslant 0} p_n = 1 = \frac{p_0}{1-\rho}$, on obtient $p_0 = 1 - \rho$ (et la condition $\rho < 1$ est retrouvée). À ce stade, on reconnaît la fonction génératrice d'une loi géométrique de paramètre ρ, d'où $p_n = (1-\rho)\rho^n$.
6. On part de $p_{n+2} - (\rho+1)p_{n+1} + \rho p_n = 0$. L'équation caractéristique est alors $X^2 - (\rho+1)X + \rho = 0$ dont les solution sont $X = 1$ et $X = \rho$. La forme générale de solutions de la récurrence linéaire est donc $p_n = c + d\rho^n$. Comme $\sum_{n\geqslant 0} p_n = 1$, on doit avoir $c = 0$. La condition au bord $p_1 = \rho p_0$ donne alors $d = p_0$ (car $p_1 = d\rho$). On trouve finalement $p_0 = 1 - \rho$ par normalisation.
7. Pour calculer l'espérance du nombre de clients dans la file, on peut utiliser directement la fonction génératrice $G(z)$. En effet, l'espérance est alors $G'(1)$:
$$G'(z) = (1-\rho)\frac{-1}{(1-\rho z)^2}(-\rho) = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho z)^2}$$
d'où $L = \frac{\rho}{(1-\rho)}$.
On peut également remarquer qu'il s'agit à un facteur ρ près d'une distribution géométrique dont le terme général est $p(1-p)^{n-1}$ et dont l'espérance vaut $\frac{1}{p}$. Le paramètre de cette loi est $p = 1 - \rho$ et on en déduit le même résultat.

8. $$L_q = \sum_{n\geqslant 1}(n-1)p_n = \sum_{n\geqslant 1}(n-1)p_n + \sum_{n\geqslant 1} p_n - \sum_{n\geqslant 1} p_n = \sum_{n\geqslant 1} np_n - \sum_{n\geqslant 1} p_n = L-(1-p_0)$$

   Ce résultat n'utilise aucune propriété de la distribution, il est donc valable pour toutes les files. En utilisant la valeur de L obtenue à la question précédente, on trouve $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$.

▸ **Exercice 3**

1. Elle dépend de la politique de service : PAPS (premier arrivé premier servi) et PADS (premier arrivé dernier servi) ne donnent pas du tout la même répartition, même si l'espérance est la même.
2. La probabilité qu'une personne trouve n personnes devant lui à son arrivée est la probabilité qu'il y ait n personnes dans la file : $q_n = p_n$. C'est vrai car il s'agit d'un processus de Poisson mais c'est faux dans le cas général (notamment avec des arrivés déterministes bien choisies).
3. T_q n'est ni discrète, ni à densité mais un mélange des deux : elle est à densité pour $t > 0$ et a un point de masse en 0. $W_q(0) = \mathbb{P}(\text{la file est vide}) = p_0 = 1-\rho$
4. $$\begin{aligned}
W_q(t) &= \mathbb{P}\Big(T_q \leqslant t\Big) \\
&= W_q(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \cdot \mathbb{P}\Big(n \text{ arrivées en moins de } t \,\Big|\, n \text{ client présents à l'arrivée dans la file}\Big) \\
&= 1-\rho + \sum_{n=1}^{+\infty}(1-\rho)\rho^n \int_0^t \frac{\mu^n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu x}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x \\
&= 1-\rho + (1-\rho)\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x \\
&= 1-\rho + (1-\rho)\lambda \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x \\
&= 1-\rho + (1-\rho)\lambda \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu x}\mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= 1-\rho + \frac{(1-\rho)\lambda}{\lambda-\mu}\left[\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)x}\right]_0^t \\
&= 1-\rho + \frac{(1-\rho)\lambda}{-\mu(1-\rho)}\left(\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}-1\right) \\
&= 1-\rho-\rho\left(\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}-1\right) \\
&= 1-\rho\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}
\end{aligned}$$
5. On a $f_{T_q}(t) = W_q'(t) = -\rho(\lambda-\mu)\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}$, d'où
   $$W_q = \mathbb{E}\Big(T_q\Big) = \int_0^{+\infty} t\cdot(-\rho)(\lambda-\mu)\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\,\mathrm{d}t = \left[-\rho t\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \rho\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\,\mathrm{d}t = 0 + \rho\left[\frac{\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda-\mu}\right]_0^{+\infty} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}.$$
6. Il faudrait compter $n+1$ temps de service lorsqu'il y a n personnes à l'arrivée d'un client. Pour cela, on supprime le premier terme (T est une variable à densité), comme $p_{n-1} = \frac{1}{\rho}p_n$, cela revient à diviser par ρ les deuxième terme de la somme :
   $$W(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t) = \frac{1}{\rho}\cdot(-\rho)\left(\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}-1\right) = 1-\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}$$
   on reconnaît là la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\mu-\lambda$, d'où $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$.
7. On découvre la loi de Little : $L = \lambda W$ et $L_q = \lambda W_q$ qui est en fait beaucoup plus générale.