TD 6 : Théorèmes de Foster

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Théorèmes de Foster

Théorème (Premier théorème de Foster)

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène irréductible de terme général p_{ij} sur un ensemble E dénombrable. S'il existe une fonction $h : E \to \mathbb{R}^+$, un ensemble fini F et une constante $\varepsilon > 0$ tels que

$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) < \infty \quad \text{pour tout } i \in F$$
$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) \leqslant h(i) - \varepsilon \quad \text{pour tout } i \notin F,$$

alors (X_n) est récurrente positive.

Théorème (Second théorème de Foster)

Soit X_n une chaîne de Markov homogène irréductible de terme général p_{ij} sur un ensemble E dénombrable. S'il existe une fonction $h : E \to \mathbb{R}^+$ et un ensemble fini F tels que

$$\mathbb{E}(|h(X_1) - h(X_0)| \mid X_0 = i) < +\infty \quad \textit{i.e. } h \text{ est à } \textit{incréments bornés}$$
$$h(j_0) > \max_{i \in F} h(i) \quad \text{pour un certain } j_0 \notin F$$
$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) \geqslant h(i) \quad \text{pour tout } i \notin F$$

alors (X_n) n'est pas récurrente positive.

Exercice 1 (Autour des théorèmes)

1. Reformuler les théorèmes de Foster en utilisant $\mathbb{E}(h(X_{n+1}) - h(X_n) \mid X_n = i)$.
2. Donner des contre-exemples aux théorèmes de Foster lorsque les hypothèses ne sont pas satisfaites.

Exercice 2 (Marches aléatoires)

1. Montrer qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ uniforme (les nœuds sont tous identiques sauf peut-être au voisinage de 0) mais dont la probabilité d'aller à droite est plus grande que celle d'aller à gauche n'est pas récurrente positive.
2. Qu'en est-il si la chaîne « penche vers la gauche » (sauf en 0) ?
3. Est-il vrai qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ « qui rapproche de l'origine » est récurrente positive ? En toute dimension ?

2 Stabilisation d'Aloha

Aloha est un protocole de communication sur un canal partagé entre plusieurs stations qui n'ont pas conscience les unes des autres. Les transmissions et retransmissions ne peuvent débuter qu'à des moments du type $k\delta$ avec k entier et $\delta > 0$ la largeur d'une *case*. Lorsque deux stations essayent de transmettre simultanément des messages, ils se brouillent mutuellement et aucun n'est correctement transmis. Ces *conflits* sont détectés par les stations. Le protocole est le suivant :

– les messages frais essayent systématiquement de passer à l'instant qui suit leur arrivée
– en cas de conflit, chaque station participant au conflit essaie indépendamment de retransmettre son message au début de la case suivante avec probabilité $0 < \nu < 1$.

On note A_n le nombre de messages frais arrivés au début de la case n et X_n le nombre de message retardés à l'instant n.

Exercice 3 (Instabilité d'Aloha)

1. Quelle hypothèse est-il raisonnable de faire ?

On pose

$$a_i = \mathbb{P}(A_n = i) \qquad \lambda = \mathbb{E}(A_n) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, a_i.$$

2. Donnez la probabilité $b_i(k)$ que i stations essayent de retransmettre s'il y a k stations en conflit.
3. Donnez la probabilité p_{kl} de passer de k à l messages retardés.
4. Montrer, à l'aide du second théorème de Foster, que ce protocole est instable, *i.e.* que la suite X_n n'est pas récurrente positive.
5. Comment cela se traduit-il concrètement pour le protocole ?

Exercice 4 (Stabilisation d'Aloha)

Plutôt que d'utiliser une politique de retransmission à ν fixe, on va essayer d'atteindre la stabilité en utilisant un $\nu(k)$ variable en fonction du nombre de messages retardés. On va montrer que la condition

$$\lambda < \liminf_{k\to+\infty} (b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1)$$

est suffisante pour la stabilité. Elle équivaut à l'existence de $\varepsilon > 0$ et d'un ensemble fini $F \subset \mathbb{N}$ tels que

$$\lambda < b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1 - \varepsilon \quad \text{pour tout } i \notin F.$$

1. Sous cette hypothèse, utiliser le premier théorème de Foster pour conclure.
2. Étudiez les extrémas de la fonction $g_k(\nu) = (1-\nu)^k a_1 + k\nu(1-\nu)^{k-1} a_0$.
3. En remarquant que $\left(\frac{k-1}{k-a_1/a_0}\right)^{k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{a_1}{a_0}-1}$, donner une condition suffisante de stabilité.
4. Comment s'illustre cette condition lorsque les A_n suivent une distribution poissonnienne ?
5. Quel est le défaut de cette politique de retransmission ?

Solutions

▶ Exercice 1

1. On a
$$\sum_{k\in E} p_{ik}h(k) - h(i) = \mathbb{E}(h(X_{n+1}) \mid X_n = i) - h(i) = \mathbb{E}(h(X_{n+1}) - h(i) \mid X_n = i) = \mathbb{E}(h(X_{n+1}) - h(X_n) \mid X_n = i)$$
Les dernière hypothèses des théorèmes deviennent alors :
– pour le premier : $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid X_n = i) = -\varepsilon < 0$
– pour le second : $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid X_n = i) \geqslant 0$
On peut également reformuler la première condition du premier théorème en utilisant la finitude de h : $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid X_n = i) < \infty$.

2. – si la fonction de potentiel peut prendre des valeurs négatives, on choisit $h(k) = -k$ sur la marche aléatoire classique sur $\mathbb{Z}$ avec $p_{n,n-1} = \frac{9}{10}$ et $p_{n,n+1} = \frac{1}{10}$ pour vérifier les hypothèses du premier théorème de Foster et être néanmoins transciente.
– En prenant $F = E$ dans le premier théorème, on supprime la seconde hypothèse.
– si on supprime la nécessité d'avoir un $\varepsilon > 0$ dans le premier théorème de Foster et on ne requiert que la stricte positivité, on brise la certitude du retour dans F et le théorème est faux : prendre par exemple $E = \mathbb{N}$, $p_{n,n+1} = \frac{n-1}{n}$, $h(k) = \frac{1}{k}$ et $F = \varnothing$. Alors, $\mathbb{E}(h(X_{n+1}) - h(X_n) \mid X_n = k) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ et pourtant la suite est transciente.
– Si la première condition du premier théorème n'est pas satisfaite, il existe un état $i \in F$ tel que $\mathbb{E}(h(X_{n+1} \mid X_n = i) = +\infty$ et l'espérance du nombre de pas pour rejoindre F devient infini, *i.e.* la suite est récurrente nulle.
– Sans la seconde hypothèse, la chaîne « qui va à droite » est un contre-exemple.

▶ Exercice 2

1. On prend $h(k) = k$, $F = \{0\}$ et $j_0 = 1$. Alors $\mathbb{E}(|h(X_1) - h(X_0)| \mid X_0 = i) = 1 < +\infty$, $h(1) = 1 > 0 = h(0)$ et $\mathbb{E}(h(X_1) - h(X_0) \mid X_0 = i) = p_d - p_g \geqslant 0$ donc d'après le second théorème de Foster, la chaîne n'est pas récurrente positive.
2. On utilise le premier théorème de Foster avec $h \equiv Id$, $F = \{0\}$ et $\varepsilon = p_g - p_d$.
3. On pose $h(p) = \|p\|_1$, ε assez petit et $F = \{0\}$. Alors, $\sum_{i\in E} p_{0i}h(i) = p_{01}1 + p_{0-1}1 = 1 < \infty$ et $\sum_{j\in E} p_{ij}h(j) = p_{i(i+1)}(i+1) + p_{ii-1}(i-1) = i + (p_{ii+1} - p_{ii-1}) \leqslant h(i) - \varepsilon$. On peut donc appliquer le premier théorème de Foster.

▶ Exercice 3

1. On suppose que la suite (A_n) est i.i.d. (et intégrable, sans quoi il arrive en moyenne une infinité de messages à chaque instant !).
2. C'est la répétition indépendante d'un phénomène local donc on obtient facilement $b_i(k) = \binom{k}{i}\nu^i(1-\nu)^{k-i}$. Pour simplifier l'étude, on suppose dans la suite que la réémission d'un message est indépendante même des autres messages de la même station. En d'autre terme, chaque message d'une station essaie indépendamment des autres d'être réémis, de sorte qu'une station peut être en conflit avec elle-même.
3. On va faire une distinction de cas :
– le nombre de message peut diminuer de 1 s'il n'y a pas d'arrivée de nouveau message et qu'un message peut être transmis : $b_1(k)\,a_0$
– le nombre de message peut rester constant si :
  – un nouveau message arrive et qu'il est transmis : $b_0(k)\,a_1$
  – aucun message n'arrive et zéro ou plus de 2 messages tentent de passer : $(1 - b_1(k))\,a_0$
– le nombre de message augmente de 1 si un nouveau message arrive et qu'il ne peut être transmis : $(1 - b_0(k))\,a_1$
– le nombre de message augmente de $m > 1$ si autant de messages arrivent : a_m
4.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid X_n = k) &= -1.b_1(k)\,a_0 + 0.(b_0(k)\,a_1 + (1 - b_1(k))\,a_0) + 1.(1 - b_0(k))\,a_1 + \sum_{m\geqslant 2} m.a_m \\ &= -1.b_1(k)\,a_0 + 1.(-b_0(k)\,a_1) + a_1 + \sum_{m\geqslant 2} m.a_m \\ &= \lambda - (b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1)\end{aligned}$$
Ce résultat est très intuitif : la variation moyenne du nombre de messages en attente est égale au nombre moyen de messages qui arrivent moins le nombre moyen de messages qui sont transmis (*i.e.* la probabilité d'une transmission réussie).

Comme $b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1 \xrightarrow{k\to+\infty} 0$, pour k assez grand, on a $b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1 \leqslant \lambda$ donc $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, X_n = k) \geqslant 0$. Ainsi, en dehors d'un ensemble fini F de la forme $[\![0, K]\!]$, cette inégalité est vraie. Les conditions du second théorème de Foster sont remplies pour Id et F, l'intégrabilité des A_n donnant la première condition du théorème puisque $\mathbb{E}(|X_{n+1} - X_n| \,|\, X_n = i) = \lambda + (b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1) < \lambda + 1$.

5. L'instabilité signifie qu'en espérance, on ne repasse pas par un nombre de messages en attente déjà vu, autrement dit que le nombre de messages retardés ne va que croître donc que le protocole échoue à transmettre les messages.

▸ Exercice 4

1. On a alors $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, X_n = k) < -\varepsilon$ dès que $k \notin F$. Par ailleurs, $\sum p_{kj} h(j) = \lambda < +\infty$ donc les conditions du premier théorème de Foster sont réunies pour $h = Id$.

2.
$$g_k'(\nu) = -k(1-\nu)^{k-1}a_1 - k(k-1)\nu(1-\nu)^{k-2}a_0 + k(1-\nu)^{k-1}a_0 = k(1-\nu)^{k-2}((1-\nu)(a_0 - a_1) - (k-1)\nu a_0)$$
qui s'annule lorsque $(1-\nu)(a_0 - a_1) - (k-1)\nu a_0 = 0$ (car $0 < \nu < 1$), *i.e.* $\nu = \nu(k) = \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}$. Pour que cette probabilité ait un sens, on doit avoir $a_0 > a_1$. Cet extremum est un maximum, qui vaut
$$g_k(\nu(k)) = (1-\nu(k))^k a_1 + k\nu(k)(1-\nu(k))^{k-1}a_0 = a_0\left(\frac{(k-1)a_0}{ka_0 - a_1}\right)^{k-1} = a_0\left(\frac{k-1}{k - a_1/a_0}\right)^{k-1}$$
donc la fonction g_k est décroissante sur $[\nu(k), +\infty[$.

3. On remarque que la condition $\lambda < \liminf_{k\to+\infty}(b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1)$ se ré-écrit $\lambda < \liminf_{k\to+\infty} g_k(\nu(k))$. Comme g_k est décroissante, on a $\liminf_{k\to+\infty} g_k(\nu(k) = \lim_{k\to+\infty} g_k(\nu(k))$. En utilisant l'indication de l'énoncé, on obtient la condition suffisante de stabilité suivante : $\lambda < a_0\, \mathrm{e}^{\frac{a_1}{a_0} - 1}$.

4. Pour une distribution poissonnienne des A_n (*i.e.* $a_i = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$), la condition devient $\lambda \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ car $a_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$ et $a_1 = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$ d'où
$$a_0\,\mathrm{e}^{\frac{a_1}{a_0} - 1} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda}{\mathrm{e}^{-\lambda}}} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda - 1} = \mathrm{e}^{-1}$$
Avec cette distribution, la condition nécessaire $a_0 > a_1$ est automatiquement vérifiée.

5. Le défaut de cette politique est de ne pas être distribuée puisqu'elle nécessite de connaître le nombre de messages retardés. Pour résoudre ce problème, le protocole Ethernet utilise la politique distribuée suivante :
   - les message frais sont émis dès que possible
   - au j^{e} conflit consécutif où elle participe, chaque station tire uniformément un entier n_j dans l'intervalle $[\![1, 2^j]\!]$ et tente de ré-émettre au bout de n_j étapes.

   Une autre politique de gestion de conflit est celle dite d'Intervalle de Résolution de Conflits (IRC). Dans celle-ci, les cases de temps sont divisées en IRC durant lesquelles aucun nouveau message n'est réémis tant que le conflit en cours n'a pas été complètement résolu. Initialement, tous les messages qui tentent de passer sont dans la couche 0. Lors d'un conflit, tous les messages de la couche 0 lancent une pièce équilibrée et, en fonction du résultat, vont dans la couche 1 ou restent dans la couche 0. À chaque nouveau conflit, le niveau des couches non nulles augmente de 1. Après une émission réussie, le niveau 0 est vide et on décrémente tous les niveaux de 1. Il est à noter que les stations savent toujours quand commencent et terminent les IRC car le nombre de couches ne varie que lors d'un conflit, d'un blanc ou d'une transmission qui sont détectes par les stations. Ainsi, elles peuvent émettre les messages en attente.