TD 5 : Chaînes de Markov finies

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Exercice 1 (Chapman-Kolmogorov)

On rappelle les *équations de Chapman-Kolmogorov* vérifiées par les chaînes de Markov :

$$\forall i j \in \mathcal{E}, p_{ij}(n+m) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(n) \cdot p_{kj}(m)$$

La notation $p_{ij}(n)$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes. On se donne une suite (X_n) de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X_0 = -1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$ et on définit la suite (Y_n) par : $Y_{2n} = X_n$ et $Y_{2n+1} = X_n X_{n+1}$.

1. Montrer que la suite (Y_n) est i.i.d.
2. Vérifier que la suite (Y_n) satisfait les équations de Chapman-Kolmogorov.
3. Montrer que ce n'est pourtant pas une chaîne de Markov.
4. On considère la suite (Y_n, Y_{n+1}). Montrez qu'il s'agit d'une chaîne de Markov (non homogène).

Exercice 2 (Problème du partiel de 2010)

Les chaînes de Markov considérées ici sont finies, c'est-à-dire leur nombre d'états est fini. Dans ce cadre, on dispose du théorème suivant :

Théorème (Perron-Frobénius faible)

Si P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène finie irréductible et apériodique, alors il existe une unique distribution stationnaire π.

L'objectif de ce problème est de ramener le cas des chaînes homogènes finies à ce théorème et de donner une méthode algorithmique de décomposition.

On définit la relation de communication $i \leftrightarrow j$ par $\exists n \, \exists m,\ p_{ij}(n) > 0, p_{ji}(m) > 0$. On rappelle que $p_{ij}(n)$ désigne la probabilité d'aller de l'état i à l'état j en n transitions et que par convention $p_{ii}(0) = 1$.

Ajout 2011 : Comme vous ne l'avez pas encore vu en cours, je vous donne la définition d'un état récurrent et un critère de récurrence :

$$i \text{ est récurrent } := \quad \mathbb{P}(\tau_i < +\infty) = 1 \quad \iff \textstyle\sum_{n \geqslant 0} p_{ii}(n) = +\infty.$$

où τ_i est le *temps de retour* en i.

1. Vérifier que la relation de communication est une relation d'équivalence.
2. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées *classes de communication*. Montrer que tous les états d'une même classe sont de même nature : ou bien tous récurrents ou bien tous transcients.
3. Montrer que deux états d'une même classe de communication ont même période.
4. Quelles sont les classes *finales*, *i.e.* celles que l'on ne peut quitter ?
5. Justifier que l'ensemble des états de la chaîne peut se partitionner en $T \cup R_1 \cup \cdots \cup R_n$ où T contient les états transcients et chaque R_i est une classe finale.
6. Montrer que, presque sûrement, la chaîne ne reste pas dans l'ensemble des états transcients.
   (on pourra utiliser la caractérisation des états transcients : i est transcient *ssi* $\sum_{n \geqslant 0} p_{ii}(n) < +\infty$)
7. Que dire de la chaîne restreinte à une classe finale ? Est-elle apériodique ? irréductible ? Justifier.
8. Montrer que si une classe finale est de période $d > 1$, alors elle peut se décomposer en d sous-ensembles irréductibles apériodiques pour la chaîne de matrice P^d.

9. Étant donné un état initial i, on cherche à savoir dans quelle classe finale la chaîne va se retrouver. Pour cela, on reprend la décomposition de la question 5 et on fusionne tous les états d'une classe finale en un unique état. On obtient alors une matrice P^* de la forme
$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$
avec n le nombre classes finales de la chaîne. En utilisant la loi des probabilités totales, montrer que la probabilité d'aller dans une classe finale depuis T est donné par la matrice $\sum_{m\geqslant 0} BQ^m = B(I_{|T|} - Q)^{-1}$, *i.e.* la probabilité d'atteindre la i^{e} classe finale depuis une distribution π sur T est $(B(I_{|T|} - Q)^{-1}\pi)_i$.
10. En utilisant les résultats des questions précédentes, donner un algorithme qui calcule la probabilité asymptotique d'être dans un état i d'une chaîne de Markov finie.
11. Illustrer cet algorithme sur la chaîne suivante à sept états numérotés de 1 à 7 (les entrées laissées vides correspondent à des 0).
$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 & & & & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & & & & & 0{,}1 \\ & & & 1 & 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ & & 0{,}4 & & & 0{,}1 & \\ & & 0{,}6 & & & 0{,}2 & 0{,}1 \\ & & & & & 0{,}3 & 0{,}2 \\ & & & & & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Temps d'arrêt)

Une variable aléatoire T est un temps d'arrêt pour une suite de v.a. (X_n) lorsque l'événement $\{T = m\}$ ne dépend que de $X_1, \ldots, X_m$. On fixe (X_n) et on se donne T_1 et T_2 deux temps d'arrêts pour X. Indiquer si les v.a. suivantes sont des temps d'arrêt :

1. une variable aléatoire constante
2. le premier retour en un point
3. le dernier retour en un point
4. $T_1 + k$, où $k \in \mathbb{N}$
5. $T_1 - k$, où $k \in \mathbb{N}$
6. $\max(T_1, T_2)$ et $\min(T_1, T_2)$
7. $T_1 + T_2$ et $T_1 - T_2$
8. $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid X_1 + \cdots + X_n \leqslant t\}$ (on suppose les X_n positifs)
9. $N(t) + 1$

Solutions

▶ Exercice 1

1. il suffit de vérifier que $\mathbb{P}(Y_{2n+1} = i \mid Y_{2n} = j) = \mathbb{P}(Y_{2n+1} = i)$ et $\mathbb{P}(Y_{2n} = i \mid Y_{2n-1} = j) = \mathbb{P}(Y_{2n} = i)$ pour l'indépendance (car Y_i ne dépend pas de Y_j pour $j \leqslant i-2$) et que $\mathbb{P}(Y_{2n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ par la formule des probabilités totales.
2. Par indépendance, $\mathbb{P}(Y_m = i \mid Y_n = j) = \mathbb{P}(Y_m = i)$. Or comme Y_i est i.i.d., elle suit la même loi que X_0 donc $\forall i \in \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(Y_m = i) = \mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{2}$. On en déduit alors

$$\begin{aligned}
p_{ij}(m, m+n+r) &= \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j \mid Y_m = i) = \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j) = \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} \\
&= \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j \mid Y_{m+n} = 1)\,\mathbb{P}(Y_{m+n} = 1 \mid Y_n = i) + \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j \mid Y_{m+n} = -1)\,\mathbb{P}(Y_{m+n} = -1 \mid Y_n = i) \\
&= \sum_{k \in \{-1,1\}} \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j \mid Y_{m+n} = k)\,\mathbb{P}(Y_{m+n} = k \mid Y_n = i) \\
&= \sum_k p_{ik}(n, n+m) p_{kj}(m+n, m+n+r)
\end{aligned}$$

3. $$\mathbb{P}(Y_{2n+2} = 1 \mid Y_{2n+1} = -1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Y_{2n+2} = 1 \mid Y_{2n+1} = -1,\ Y_{2n} = 1) = 0$$
4. Posons $Z_n = (Y_n, Y_{n+1})$. On peut déjà remarquer que la seconde composante de Z_n impose la première de Z_{n+1}.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{2n+1} = (1,1) \mid Z_{2n} = (1,1)) &= 1 & \mathbb{P}(Z_{2n+2} = (1,1) \mid Z_{2n+1} = (1,1)) &= 0,5 \\
\mathbb{P}(Z_{2n+1} = (1,-1) \mid Z_{2n} = (1,1)) &= 0 & \mathbb{P}(Z_{2n+2} = (1,-1) \mid Z_{2n+1} = (1,1)) &= 0,5 \\
\mathbb{P}(Z_{2n+1} = (-1,1) \mid Z_{2n} = (1,-1)) &= 0 & \mathbb{P}(Z_{2n+2} = (-1,1) \mid Z_{2n+1} = (1,-1)) &= 0,5 \\
\mathbb{P}(Z_{2n+1} = (-1,-1) \mid Z_{2n} = (1,-1)) &= 1 & \mathbb{P}(Z_{2n+2} = (-1,-1) \mid Z_{2n+1} = (1,-1)) &= 0,5
\end{aligned}$$

▶ Exercice 2

1. **réflexivité** $p_{ii}(0) = 1 > 0$ donne que $n = m = 0$ conviennent

   symétrie il suffit d'inverser n et m

   transitivité Soient $i \leftrightarrow j \leftrightarrow k$. Il existe donc n, m, q, r tels que $p_{ij}(n) > 0, p_{ji}(m) > 0, p_{jk}(q) > 0$ et $p_{kj}(r) > 0$. Alors $p_{ik}(n+q) \geqslant p_{ij}(n)p_{jk}(q) > 0$ et $p_{ki}(m+l) \geqslant p_{kj}(m)p_{ji}(r) > 0$ d'où $i \leftrightarrow k$.
2. Soient i et j deux états d'une même classe de communication. On va utiliser la caractérisation donnée à la question 6. Par symétrie, il suffit de montrer que si i est récurrent, alors j l'est également. Comme $i \leftrightarrow j$, il existe n et m tels que $p_{ij}(n) > 0$ et $p_{ji}(m) > 0$. On a alors par l'inégalité de Chapman-Kolmogorov :

$$p_{jj}(m+k+n) \geqslant p_{ji}(m)p_{ii}(k)ij(n) = \alpha p_{ii}(k)$$

   où $\alpha \in]0,\ 1]$. On en déduit que si la série $\sum_{n \geqslant 0} p_{ii}(n)$ diverge, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} p_{ii}(n)$ diverge également.
3. Soient $i \leftrightarrow j$. Il existe donc n et m tels que $p_{ij}(n) > 0$ et $p_{ji}(m) > 0$. On note d_i et d_j leurs périodes respectives. On a donc $d_i | n+m$ et $d_j | n+m$. Si D_j est l'ensemble des longueurs des cycles contenant j, on a $d_j = \operatorname{pgcd} D_j$ et par définition du pgcd, il suffit de montrer que $\forall d \in D_j, d_i | d$ pour avoir $d_i | d_j$. Soit donc $d \in D_j$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$p_{ii}(n+m+kd) \geqslant p_{ij}(n)p_{ji}(m)p_{jj}(kd) > 0$$

   On en déduit $d_i | n+m+kd$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'où $d_i | d$ car il divise la différence pour $k+1$ et k. Ainsi, $d_i | d_j$. Par symétrie, on a aussi $d_j | d_i$ d'où au final $d_i = d_j$.

4. Ne pas pouvoir quitter une classe signifie qu'il n'y a pas de transition sortant de la classe. On va voir que cela correspond exactement aux classes de communication récurrentes. On a donc deux implications à montrer : récurrence $\Rightarrow$ finale et finale $\Rightarrow$ récurrente. Pour le sens réciproque, on peut utiliser la même méthode qu'à la question 6. Pour le sens direct, par contraposée, il suffit de montrer qu'une classe qui possède une transition sortante (i, j) (donc non finale) est transciente, ce qui revient à montrer qu'un état de cette classe est transcient d'après la question 2. On choisit un état i, duquel part une transition qui sort de la classe de communication. Prendre cette transition empêche tout retour vers i (sinon elle serait dans la classe de communication) donc, en notant τ_i le temps de retour en i, $\mathbb{P}(\tau_i < +\infty \mid X_0 = i) \leqslant 1 - p_{ij} < 1$, *i.e.* l'état i est transcient.
5. Il suffit de regrouper les classes transcientes au sein d'une même partition et de conserver chaque classe récurrente (donc finale) comme l'un des R_i.
6. Supposons par l'absurde que la chaîne reste dans l'ensemble T. Alors il existe un état de T, appelons-le i, visité une infinité de fois. Ainsi, la probabilité de rester dans T est inférieure à la somme (finie) sur $i \in T$ des probabilité de passer infiniment souvent en i. Mais $\mathbb{P}(N_i \geqslant k) = \mathbb{P}(T_i < \infty)^k \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ puisque i est transcient. Par majoration, la probabilité de rester infiniment dans T est nulle, *i.e.* presque sûrement, la chaîne ne reste pas dans les états transcients.
7. La chaîne restreinte n'est pas nécessairement apériodique : prendre par exemple une chaîne à deux états 1 et 2 telle que $p_{12} = p_{21} = 1$. En revanche, comme une classe finale est en particulier une classe de communication, la chaîne restreinte est irréductible.
8. Les sous-ensembles recherchés sont les niveaux de distance modulo d à partir d'un état quelconque e de la classe. Il nous faut tout d'abord montrer que ces sous-ensembles sont stables par P^d afin que restreindre la chaîne à ceux-ci ait bien du sens. Soient donc i un état au niveau n_i. On note $P_i^d = \left\{ j \;\middle|\; p_{ij}(d) > 0 \right\}$ et on prend $j \in P_i^d$. On va montrer que $n_j \equiv n_i \mod d$. Pour cela, on remarque que comme on se trouve dans une classe finale (donc une classe de communication), il existe n et m tels que $p_{ie}(n) > 0$ et $p_{je}(m) > 0$. Alors $p_{ii}(d + m + n_i) \geqslant p_{ij}(d)p_{je}(m)p_{ei}(d_i) > 0$ donc $d|d + m + n_i$ *i.e.* $d|n_i + m$. Mais d'autre part, $p_{jj}(n_j + m) \geqslant p_{je}(m)p_{ej}(n_j) > 0$ donc $d|d_j + m$. Ainsi, $d|n_i - n_j$ *i.e.* $n_j \equiv n_i \mod d$.

   Montrons à présent que les d chaînes de Markov induites par P^d sont irréductibles et apériodiques.

   irréductibilité Soient i et j deux éléments dans le même niveau de distance modulo d. Comme la classe finale est une classe de communication, il existe n, m, q, r tels que $p_{ei}(n) > 0, p_{ie}(m) > 0, p_{ej}(q) > 0$ et $p_{je}(r) > 0$. On a alors $p_{ij}(m + q) \geqslant p_{ie}(m)p_{ej}(q) > 0$. Reste à voir que ce chemin est possible dans P^d *i.e.* que $d|m + q$. Par définition de la période d, $d|n + m$ puisque $p_{ii}(n + m) > 0$. On a également $n \equiv q[d]$, *i.e.* $d|q - n$ car i et j sont dans le même niveau de distance par rapport à e. On en déduit $d|m + n + q - n = m + q$.

   apériodicité Il suffit de montrer que la période d'un état du sous-ensemble est 1. Prenons donc un état i. On se donne un ensemble fini de cycles contenant i dont le pgcd des longueurs vaut d (c'est possible par définition de la période car d est la période de la classe finale que l'on considère). En faisant des macro-transitions de longueur d, on divise par d la longueur de tous ces cycles (elles sont toutes multiples de d par définition de la période) et le nouveau pgcd vaut alors 1.

   On peut également faire les démonstrations de la stabilité et de l'irréductibilité plus rapidement en utilisant le graphe de la chaîne :

   stabilité On prend i quelconque et j tel que $i \xrightarrow{d} j$. On a $e \xrightarrow{n_i} i$, $e \xrightarrow{n_j} j$ et $j \xrightarrow{m_j} e$ tels que $n_i + d + m_j \equiv n_j + m_j \equiv 0 \mod d$ car ce sont des cycles. On en déduit immédiatement $n_i \equiv n_j \mod d$ qui est le résultat voulu.

   irréductibilité On prend i et j dans la même classe cyclique. On a donc $e \xrightarrow{n_i} i$, $e \xrightarrow{n_j} j$, $i \xrightarrow{m_i} e$ et $j \xrightarrow{m_j} e$ avec $n_i \equiv n_j \mod d$ et $n_i + m_i \equiv n_j + m_j \equiv 0 \mod d$ car ce sont des cycles. D'où $m_j \equiv m_i \mod d$ puis $n_i + m_j \equiv n_j + m_i \equiv 0 \mod d$ donc $i \xrightarrow{(m_i+n_j)/d} j$ et $j \xrightarrow{(m_j+n_i)/d} i$ dans P^d.
9. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'aller de T à une classe finale vaut la somme des probabilité d'y aller en $n+1$ étapes pour $n \in \mathbb{N}$. Or y aller en $n+1$ étapes demande de rester dans T pendant n étapes puis de passer. Comme la matrice P^* est écrite dans la base $T \cup \{r_i \mid R_i \text{ classe finale}\}$, rester dans T correspond à la multiplication par la matrice Q et aller de T à une classe finale correspond à la multiplication par B. Ainsi, partant d'une distribution de probabilité π sur T, la probabilité d'aller dans une classe finale est donnée par multiplication par la matrice $\sum_{m\in\mathbb{N}} BQ^m$.
10. L'algorithme commence par calculer les composantes connexes du graphe de la chaîne, *i.e.* ses parties irréductibles. Chacune forme alors une chaîne de Markov indépendante des autres. Sur chacune, on calcule les classes de communication (*i.e.* les composantes fortement connexes) et on détermine celles qui sont récurrentes (elles n'ont pas de transitions sortantes). Dans ces classes finales, on calcule la période et utilise la décomposition cyclique de la question 8 pour se ramener à l'étude de chaînes irréductibles apériodiques pour lesquelles le théorème donné en début de problème assure l'existence d'une unique distribution stationnaire, que l'on peut calculer par résolution matricielle. Enfin, afin d'unifier les différents résultats ainsi obtenu, on utilise

la question précédente qui donne la probabilité de passer d'un état transcient dans une classe finale (étant entendu que si l'on commence dans une classe finale, on y reste forcément).

11. La chaîne est irréductible car les états 6 et 7 permettent d'aller dans tous les autres. On voit facilement que les sous-ensembles $\{1,2\}$ et $\{3,4,5\}$ sont des classes finales (fortement connexes = facile à voir + absorbant = les colonnes correspondantes forment des blocs). Les états 6 et 7 sont transcients. La partition des états de la chaîne est donc $T = \{6,7\}, R_1 = \{1,2\}$ et $R_2 = \{3,4,5\}$. Étudions les classes R_1 et R_2. Comme $p_{11} > 0$, la classe R_1 est apériodique donc le théorème s'applique et l'on résout le système
$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \pi^1 = \pi^1 \iff \pi^1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{13} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$
La classe R_2 est périodique de période 2. On considère donc les deux chaînes de Markov de matrice $P^2_{|R_2}$ sur les sous-ensembles donnés par les niveaux de distance modulo 2, à savoir $\{3\}$ et $\{4,5\}$. La chaîne à un unique état est d'étude triviale. La seconde en revanche, a pour matrice $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$ dont la distribution stationnaire est $\pi^2 = (0,4; 0,6)$. Ainsi au sein de R_2, le régime limite est une alternance entre l'état 3 et les états 4 et 5 avec probabilité $0,4$ et $0,6$ respectivement. Reste à calculer la probabilité d'aller dans R_1 ou R_2 à partir des états de $T = \{6,7\}$. On construit donc
$$P^* = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$
La solution est alors donnée par la matrice $B \sum_{m\in\mathbb{N}} Q^m = B(I_2 - Q)^{-1}$. Un simple calcul donne alors
$$I_2 - Q = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad (I_2 - Q)^{-1} = \frac{1}{0,4}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,25 & 1,75 \end{pmatrix}$$
On en tire finalement :
$$B(I_2 - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,25 & 1,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$$
À partir de ces informations, on peut par exemple calculer la probabilité d'être dans l'état 1 à partir de l'état 6 : il faut aller dans la classe finale R_1 puis être dans l'état 1 au sein de R_1, ce qui se fait avec probabilité $0,2 \cdot \frac{8}{13} = \frac{8}{65}$.
Autre exemple : si initialement tous les états sont équiprobables, alors on peut calculer la distribution finale : $\pi_1 = \frac{8}{35}, \pi_2 = \frac{1}{7}, \pi_3 = \frac{22}{35}, \pi_4 = \frac{44}{175}, \pi_5 = \frac{66}{175}, \pi_6 = 0, \pi_7 = 0$. On remarque que la somme ne fait pas 1 et cette erreur se justifie par l'alternance au sein de R_2 : la distribution stable suit en fait un cycle de période 2, à savoir $(\frac{8}{35}, \frac{1}{7}, \frac{22}{35}, 0, 0, 0, 0)$ et $(\frac{8}{35}, \frac{1}{7}, 0, \frac{44}{175}, \frac{66}{175}, 0, 0)$.

► **Exercice 3** On ne donne ici qu'une intuition et non une démonstration.

1. oui, elle ne dépend de rien !
2. oui, premier exemple vu en cours
3. non, premier contre-exemple vu en cours
4. oui, c'est un cas particulier de la somme avec une v.a. constante
5. non, car il faut savoir que l'événement va se produire dans k pas
6. oui, on attend le second (resp. premier) des deux temps d'arrêts
7. oui pour la somme car on connaît sa valeur au temps $\max(T_1, T_2) \leqslant T_1 + T_2$ mais non pour la différence (c'est déjà faux lorsque T_2 est une constante)
8. non, il faudrait savoir que la valeur du prochain X_n va faire dépasser la somme.
9. oui, cela revient à au temps d'arrêt $N'(t) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_1 + \cdots + X_n > t\}$