

TD 3 : Simulation et modélisation

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Convergences de variables aléatoires

Exercice 1

1. Rappeler les trois notions de convergence en théorie des probabilités et les illustrer par des dessins explicatifs.
2. Donner un contre-exemple pour chacune des implications fausses.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire X .

A-t-on $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$?

2 Simulation de variables aléatoires

Exercice 3 (Méthode de l'inverse)

1. Rappeler comment générer une variable aléatoire de loi donnée f à partir d'un générateur uniforme sur $[0, 1]$ par la méthode de l'inverse.
2. L'appliquer pour générer une variable aléatoire sur \mathbb{R} de densité $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.
3. Peut-on l'appliquer pour générer une variable aléatoire de loi normale centrée réduite ?

Exercice 4 (Méthode du rejet)

1. Rappeler le principe de la méthode du rejet.
2. Donner la loi en sortie en fonction de la loi en entrée et de la probabilité de la condition d'arrêt.
3. Quel est l'espérance du temps de convergence ?
4. Soit f et g des densité de probabilité sur \mathbb{R}^d telles qu'il existe c vérifiant $\forall x, f(x) \leq cg(x)$.
Si X est une variable aléatoire de loi g et U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la loi de X conditionné par $\{cUg(X) < f(X)\}$?
5. Utiliser cette méthode pour générer une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Exercice 5 (Méthode de l'alias)

On s'intéresse à présent à la génération de variables aléatoires discrètes à support fini.

1. Donner un algorithme qui génère une telle variable aléatoire en un temps logarithmique en le nombre de valeurs possibles.
2. Montrer que toute variable aléatoire discrète prenant n valeurs distinctes peut s'écrire comme une somme équiprobable de n variables de Bernoulli.
3. En déduire un algorithme qui résout le problème.

3 Introduction aux schémas de Matthes

Exercice 6 (Canal de communication en isolation)

Des paquets sont soumis pour transmission à un canal de communication muni d'une mémoire de taille infinie.

- Les dates d'arrivée des paquets au canal forment un processus de Poisson homogène d'intensité λ (c'est-à-dire que les variables aléatoires qui représentent les temps inter-arrivées des paquets sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre λ). On suppose que le premier paquet arrive à l'instant 0.
- Les paquets sont de taille aléatoire et les durées de transmission des paquets sont des variables aléatoire indépendantes identiquement distribuées de fonction de répartition F sur \mathbb{R}^+ , indépendantes du processus de Poisson des arrivées. On suppose que $F(0) = 0$.
- À leur arrivée, les paquets sont stockés dans la mémoire. Ils sont transmis dès que possible par le canal, un par un, dans l'ordre d'arrivée.

Pour représenter l'évolution d'un tel système, on définit une *variable d'état* du système, qui donne à tout instant t , le nombre $X(t) \in \mathbb{N}$ de paquets en attente ou en cours de transmission.

Afin de définir les transitions possible de cette variable d'état, on introduit deux *sources*, α pour les arrivées et β pour les départs :

- si l'état courant est 0, seule la source α est *active*, ce qui signifie que le seul événement possible est une arrivée qui fait croître la variable d'état d'une unité ;
- si l'état courant est $i > 0$, les sources α et β sont toutes deux actives, et suivant les circonstances on peut avoir un événement de type α (comme ci-dessus) ou un événement de type β qui fait décroître la variable d'état d'une unité.

Soit $A(i)$ l'ensemble des sources actives dans l'état i . Pour déterminer quelle source parmi celles qui sont actives dans un état donné génère un événement la première, on associe à chaque source une *variable de durée résiduelle* au temps t , à savoir $Y_\alpha(t)$ et $Y_\beta(t)$, à valeurs dans \mathbb{R}^+ , qui donne la durée qui sépare t du prochain événement de type α et β respectivement.

1. Faire un schéma représentant la situation.
2. À quoi correspond l'hypothèse $F(0) = 0$?
3. Donner un algorithme de simulation qui calcule pas à pas l'évolution de ce système.

Solutions

► Exercice 1

1. La convergence presque sûre $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ est : $\mathbb{P}(\{\omega \mid X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1$.

La convergence en probabilité $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ est : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

La convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ est : $\forall a, F_{X_n}(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(a)$, i.e. la convergence simple des fonctions de répartition (en leurs points de continuité).

2. - $\xrightarrow{\mathcal{L}} \not\Rightarrow \xrightarrow{\text{P}}$: Prendre $\Omega = [0, 1]$, $X_n(x) = x$ et $X(x) = x + \frac{1}{2} \pmod 1$. Alors les X_n et X ont même loi mais $|X_n(x) - X(x)| = \frac{1}{2}$ donc on ne peut avoir convergence en probabilité.

Cet exemple dit en particulier que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \not\Rightarrow X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ car on a $X_n - X = \frac{1}{2}$.

- $\xrightarrow{\mathcal{L}} \not\Rightarrow \xrightarrow{\text{P}}$: Cet exemple est plus compliqué que le précédent. On prend une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

On a $X_n \xrightarrow{\text{P}} X = 0$ car $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \end{cases}$

Par contre, on n'a pas convergence presque sûre. En effet, soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$\{\omega \mid X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} \subset \{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon \text{ pour un nombre fini de } n\} = A$$

En posant $A_n = \{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$, on peut écrire $A = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_n}$. Alors, en utilisant la σ -sous-additivité d'une mesure, l'indépendance des X_i (donc des A_i) et la majoration $1 - x \leq e^{-x}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_n}) = \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} e^{-\mathbb{P}(A_n)} = \sum_{n \geq 1} e^{-\sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_n)} = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$$

car $\sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{k \geq n} \frac{1}{k} = +\infty$. Ainsi, $\mathbb{P}(\{\omega \mid X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) \leq \mathbb{P}(A) = 0$ et on n'a donc pas convergence presque sûre. Encore mieux, la convergence en probabilité n'implique même pas la convergence simple sur un intervalle de mesure non nulle.

► Exercice 2

Non, la convergence presque sûre correspond à la convergence simple de la suite de fonctions (excepté peut-être sur un ensemble négligeable). Or il faut la convergence uniforme pour avoir la convergence des la suite des intégrales (la convergence uniforme a notamment été inventée pour ça !).

Comme contre-exemple, on peut utiliser des bosses de plus en plus étroites mais de plus en plus hautes avec une aire constante.

► Exercice 3

1. Si U est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, alors $F^{-1}(U)$ suit la loi f .

2. Si $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, alors $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$ (on doit avoir $F(+\infty) = 1$) donc $F^{-1}(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$

3. Comme le loi normale n'a pas de primitives exprimables par des fonctions usuelles, on ne peut pas l'utiliser dans la méthode de l'inverse.

► Exercice 4

1. Si on a un algorithme \mathcal{A} produisant des variables aléatoires dans \mathbb{R}^d indépendantes identiquement distribuées de loi donnée f et un événement $E(X)$ qui dépend d'une variable aléatoire X , on répète \mathcal{A} jusqu'à avoir $E(\mathcal{A})$ et on retourne la valeur de \mathcal{A} .

2. Pour calculer la loi de \tilde{X} la valeur de sortie de la méthode du rejet, on se donne un borélien B (qui joue pour nous le même rôle

qu'un intervalle dans \mathbb{R}).

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\tilde{X} \in B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} (\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}} \cap E_n \cap X_n \in B)\right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}} \cap E_n \cap X_n \in B) \\
 &= \sum_{n \geq 1} (\mathbb{P}(\overline{E}))^{n-1} \mathbb{P}(E \cap X \in B) \\
 &= \frac{\mathbb{P}(E \cap X \in B)}{1 - \mathbb{P}(\overline{E})} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(E \cap X \in B)}{\mathbb{P}(E)} \\
 &= \mathbb{P}(X \in B | E)
 \end{aligned}$$

où n représente le nombre d'itérations effectuées par l'algorithme.

- La formule de la troisième ligne nous dit que le nombre n d'essai à effectuer avant l'arrêt de l'algorithme est géométrique de paramètre $\mathbb{P}(E)$. Son espérance est donc $\frac{1}{\mathbb{P}(E)}$ et on a tout intérêt à choisir un événement de conditionnement facilement réalisé (ou un choix de \mathcal{A} qui rend E facile à réaliser).
- On va incarner le schéma précédent avec un bon choix de \mathcal{A} et E : on prend \mathcal{A} qui génère le couple (U, X) et $E = \{cUg(X) < f(X)\}$. Si B est un borélien de \mathbb{R}^d , on a :

$$\mathbb{P}(E) = \int_{[0,1] \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{cUg(X) < f(X)}(u, x) g(x) dx du = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{U < \frac{f(x)}{cg(x)}}(u, x) du dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \frac{f(x)}{cg(x)} dx = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \frac{1}{c}$$

Noter que comme g est une densité de probabilité, on a $\mathbb{P}(g(X) \neq 0) = 1$ donc la division est autorisée hors d'un ensemble de mesure nulle qui n'influe donc pas sur la valeur de l'intégrale.

De même,

$$\mathbb{P}(X \in B \cap E) = \int_{[0,1] \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_{U < \frac{f(x)}{cg(x)}}(u, x) g(x) du dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \frac{f(x)}{cg(x)} g(x) dx = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) f(x) dx = \frac{1}{c} \mathbb{P}(Y \in B)$$

La dernière égalité étant la définition de la probabilité lorsque Y suit la loi f . En faisant le rapport, on constate que cet algorithme génère une variable aléatoire de loi f .

- On nous impose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. On choisit $g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ et, comme $e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{1+x^2}$, on prend $c = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}$. Noter que pour générer une variable aléatoire de loi g , il faut utiliser la méthode de l'inverse.

► Exercice 5

- il suffit de placer les valeurs de la fonction de répartition dans un tableau et de faire une recherche dichotomique.
- Il faut voir ce théorème géométriquement : si on représente la variable aléatoire par un histogramme, on veut tasser les rectangles en un unique rectangle de hauteur $\frac{1}{n}$ et de longueur n . Cela se fait par récurrence : on prend un rectangle trop petit (s'il n'en existe pas, on a fini), un rectangle trop grand et on complète le petit par le grand. On crée ainsi une variable de Bernoulli qui contient la probabilité du petit rectangle plus une fraction de celle du grand et une distribution de support strictement plus petit sur laquelle on peut faire la récurrence.
- On reprend le procédé décrit à la question précédente.

► Exercice 6

- Il s'agit d'une file d'attente M/G/1. Voir les cours suivants.
- Elle traduit le fait que les paquets arrivent un par un : le temps qui sépare deux paquets consécutifs ne peut être nul.
- La procédure va être vue en cours.