TD 1 & 2 – Rappels de probabilités

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Probabilités discrètes

1.1 Calcul de probabilités

Exercice 1

Soient A et B des événements de probabilités $\mathbb{P}(A) = 3/4$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Montrez que $1/12 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant 1/3$.
2. Donnez des exemples qui réalisent ces bornes.
3. Donnez des bornes similaires pour $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 2

Étant donnés deux évènements A et B, quelle est la probabilité $\mathbb{P}(A \,\Delta\, B)$ que exactement l'un des deux évènements survienne ?

Exercice 3

On lance une pièce de monnaie une infinité de fois.

1. Montrez que face tombera à un moment ou un autre, avec probabilité 1.
2. Idem pour toute séquence finie de pile et de face.

Exercice 4

Trouvez une famille d'événements telle que :
- les événements sont deux à deux indépendants
- la famille n'est pas indépendante dans son ensemble.

Exercice 5

Soit $A_1, ..., A_n$ ($n \geqslant 2$), des évènements. Montrez l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}\Big(A_i \cap A_j\Big) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}\Big(A_i \cap A_j \cap A_k\Big) - \cdots + (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Exercice 6

Soient $(A_n)_{n\geqslant 1}$ des évènements presque certains (*i.e.* tels que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout n). Montrez que $\mathbb{P}(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n) = 1$.

Exercice 7

Soient A et B deux évènements indépendants. Montrez que $\overline{A}$ et B sont indépendants. Idem pour $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 8

On considère un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux rois et un as dans une main de 13 cartes ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un as dans une main de 13 cartes, sachant qu'elle contient exactement deux rois ?

Exercice 9 (Formule de Bayes)

1. Donnez deux formulations distinctes de $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Énoncez la formule de Bayes pour $\mathbb{P}(A \mid B)$, puis détaillez-la en partitionnant B avec A et $\overline{A}$.

1.2 Paradoxes

Exercice 10 (Paradoxes des anniversaires)

1. Dans un groupe de m personnes, quelle est la probabilité que deux personnes aient le même jour de naissance ?
2. A partir de quelle valeur de m cette probabilité est-elle plus grande que 1/2 ?

Exercice 11 (Les deux enfants)

Une famille a deux enfants, dont au moins un est une fille.

1. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
2. Donnez une autre réponse possible à la question précédente.
3. Expliquez pourquoi les deux réponses sont correctes.

Exercice 12 (Les trois pièces)

On lance trois pièces de monnaie. Au moins deux sont du même côté. En regardant la troisième, il y a une chance sur deux que les trois pièces soient du même côté. Expliquez ce phénomène.

Exercice 13 (Paradoxe de Saint-Pétersbourg)

Contre une certaine mise initiale, on joue au jeu suivant : On tire à pile ou face. Si c'est face la banque paye 1 euros et on stoppe le jeu, si c'est pile on relance. Si c'est face la banque paye 2 euros et on stoppe le jeu, si c'est pile on relance pour 4 euros, *etc*. Quelle doit être la mise initiale pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 14 (Paradoxe du Monty Hall)

Dans un jeu télévisé, pour gagner une voiture un candidat doit choisir entre trois portes. Deux d'entre elles sont vides et la troisième contient la voiture. Après que le candidat a choisi une porte, le présentateur ouvre l'une des deux autres qui ne contient rien. On propose alors au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

Exercice 15 (Problème de la Belle au bois dormant)

On joue avec la Belle au bois dormant qui connaît tout le protocole suivant. L'expérience dure de dimanche soir à mercredi. Elle se couche le dimanche soir et on tire une pièce équilibrée à pile ou face.

- Si c'est pile, on réveille la Belle le lundi pour un entretien.
- Si c'est face, on la réveille le lundi et le mardi, chaque fois pour un entretien.

Comme elle est toujours très ensommeillée, la Belle ne sait ni quel jour on est ni ne se souvient de ce qu'elle a fait la veille. Lors de chaque entretien (que la Belle ne sait pas distinguer), on lui demande "A votre avis, quelle est la probabilité que face soit tombé dimanche ?". Que doit répondre la Belle ?

1.3 Opérateurs de probabilités

Exercice 16

1. A-t-on toujours $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ pour X et Y variables aléatoires réelles ?
2. Idem pour $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.
3. Préciser sous quelle condition la première égalité est vraie (et le démontrer !).

Exercice 17

On rappelle la définition de la variance pour une variable aléatoire X : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.

1. Montrez qu'elle est égale à $\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.
2. Montrez que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
3. Donner un contre-exemple lorsque la condition précédente n'est pas satisfaite.

Exercice 18

On rappelle que la fonction génératrice des moments pour une variable aléatoire réelle X est définie par $M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.

1. Montrez que $M_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X^k\right) \frac{t^k}{k!}$.
2. Montrez que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

2 Lois classiques

2.1 Lois discrètes

Exercice 19

On lance une pièce biaisée qui a une probabilité p de tomber sur pile. La *loi de Bernoulli* (de paramètre p) $\mathcal{B}(p)$ est la loi du nombre de pile obtenu sur un lancer.

1. Détailler cette loi.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer sa fonction génératrice des moments.

Exercice 20

On reprend la pièce de l'exercice précédent mais on la lance n fois. On compte toujours le nombre de pile.

1. Donner la loi de cette variable aléatoire X_n, appelée *loi binomiale* de paramètres n et p et notée $\mathcal{B}(n, p)$.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer sa fonction génératrice des moments.

Exercice 21

On passe à présent à un très grand nombre de lancers de pièces. On va donc s'intéresser au comportement asymptotique lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Si p reste constant X_n va tendre vers $+\infty$. On va donc supposer que p tend vers 0 et plus précisément que np reste constant.

1. Montrer que dans ce cas, la loi binomiale tend vers la *loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ (définie sur $\mathbb{N}$) donnée par $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0$.
2. Vérifier que la loi de Poisson est bien une loi de probabilité.
3. Calculer l'espérance et la variance de cette loi.
4. Calculer sa fonction génératrice des moments.
5. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 22

Plutôt que de compter le nombre de piles pour n lancers, on décide à présent de considérer le nombre de lancers nécessaires pour voir apparaître la première occurrence de pile.

1. Donner la loi de cette variable aléatoire Y qu'on appelle *loi géométrique* de paramètre p.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer sa fonction génératrice des moments.
4. Montrez que la loi géométrique est sans mémoire : pour tous n et k dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n + k \,|\, Y > k) = \mathbb{P}(Y = n)$.

2.2 Lois continues à densité

Exercice 23

On considère la *loi exponentielle* de paramètre λ, définie par la densité $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Montrez que la loi exponentielle est *sans mémoire*, *i.e.* $\mathbb{P}(X \geqslant a + b \,|\, X \geqslant b) = \mathbb{P}(X \geqslant a)$ pour tout a et b dans $\mathbb{R}^+$.
4. Montrez réciproquement que toute loi à densité sans mémoire est exponentielle.

Exercice 24

La *loi normale* de paramètre m et σ^2 (notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$) et définie sur $\mathbb{R}$ a pour densité $f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Si X et Y suivent des lois normales indépendantes de paramètres respectifs (m_1, σ_1^2) et (m_2, σ_2^2), montrez que $X + Y$ suit une loi normale de paramètre $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
4. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, calculer la probabilité que X soit compris entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$ (on donne $F_X(2) \approx 0,97725$).

Solutions

▸ Exercice 1

1. La borne supérieure correspond à une inclusion de B dans A de sorte que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$. D'où, plus généralement, $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$. Pour la minoration, le plus simple est de voir le problème graphiquement : on cherche à répartir les probabilités de A et B sur l'espace total (de mesure 1) de façon à minimiser le chevauchement. On obtient l'inégalité suivante : $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.
2. Toute inclusion de B dans A réalise la borne supérieure. La borne inférieure peut être réalisé par un lancer de dé à 12 faces, en prenant pour A l'événement « le résultat du dé est inférieur ou égal à neuf » et pour B l'événement « le résultat du dé est supérieur ou égal à neuf ».
3. Par le même type de raisonnement, on obtient $\max \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Les bornes sont atteintes respectivement lorsque B est inclus dans A et lorsque A et B sont disjoints.

▸ Exercice 2

$\mathbb{P}(A \,\Delta\, B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$. Ne pas oublier le facteur 2, sans quoi il s'agit de l'union.

▸ Exercice 3

1. Soit X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de face qui apparaissent dans les n premiers lancers. On cherche à calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$. On a $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 1-\mathbb{P}(X_n = 0)$. Par indépendance des lancers, $\mathbb{P}(X_n = 0) = (\mathbb{P}(X_1 = 0))^n$. On a évidemment $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ (sauf si la pièce n'est pas équilibrée, mais cela ne changerait rien au raisonnement), donc $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$.
2. Soit σ un motif de longueur $|\sigma|$. On peut utiliser le même raisonnement pour majorer la probabilité de ne pas avoir d'occurrence du motif dans toute suite finie de lancers. Pour cela, on va considérer la variable aléatoire X_n qui compte le nombre d'occurrences de σ dans les $n|\sigma|$ premiers lancers. On a alors $\mathbb{P}(X_n = 0) \leqslant \mathbb{P}(X_1 = 0)^n$ en ne recherchant des motifs que dans les intervalles $[\![n|\sigma|, (n+1)|\sigma|]\!]$ et utilisant l'indépendance des lancers. On conclut alors de même.

▸ Exercice 4

On prend un univers à 4 éléments équiprobables (par exemple le lancer d'un dé à 4 faces) et on choisit les événements suivants : $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ et $A_3 = \{3, 4\}$. On a :
- pour tout j, $\mathbb{P}\left(A_j\right) = 1/2$
- pour tout $i \neq j$, $\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) = 1/4$
- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$

Cette famille n'est pas indépendantes dans son ensemble alors que tous ses éléments sont indépendants deux à deux.

▸ Exercice 5

La démonstration se fait par récurrence sur n. Afin de savoir précisément quoi démontrer, on va donner une forme close de la formule à démontrer :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S\subset[\![1,n]\!]\\|S|=k}} (-1)^{|S|-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right)$$

Le cas $n = 2$ ($\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$) se traite sans difficulté. Pour le cas général, on commence par utiliser le cas $n = 2$

pour isoler A_{n+1} avant d'utiliser l'hypothèse de récurrence sur les A_i et les $B_i = A_i \cap A_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} B_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|} \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcap_{i\in S} A_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n+1]\!] \\ |S|=k,\, n+1\in S}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n+1]\!] \\ |S|=k,\, n+1\in S}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n+1]\!] \\ |S|=k,\, n+1\in S}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n+1]\!] \\ |S|=k,\, n+1\notin S}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n+1]\!] \\ |S|=k,\, n+1\in S}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n+1]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right)
\end{aligned}$$

▶ Exercice 6

On utilise le caractère σ-sous additif (*i.e.* $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ des mesures, qui vient de leur σ-additivité (l'égalité est vraie si les A_i sont deux à deux disjoints). On considère la famille $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ des complémentaires. On a alors $\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$. Or

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (1 - \mathbb{P}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$$

donc $\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$.

▶ Exercice 7

$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - (\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$$

▶ Exercice 8

1. Comme il s'agit de probabilités discrètes, on peut utiliser un argument de dénombrement. On doit choisir 2 cartes parmi les 4 rois et une parmi les quatre as. Il reste alors 11 cartes à choisir parmi les 44 cartes restantes du jeu. Le nombre de configuration « favorables » est donc $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{10}$. Le nombre de configuration totale pour une main de 13 cartes est $\binom{52}{13}$. Au final, la probabilité recherchée est $\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{11}}{\binom{52}{13}}$.
2. On peut raisonner de même : les configurations « favorables » sont les mêmes qu'à la question précédente mais dans les configurations possibles, on ne compte que celles qui contiennent déjà 2 rois. Il y en a $\binom{4}{2}\binom{48}{11}$. On peut aussi raisonner par probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(\text{2 rois et 1 as} \,|\, \text{2 rois}) = \frac{\mathbb{P}(\text{2 rois et 1 as})}{\mathbb{P}(\text{2 rois})} = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{11}}{\binom{52}{13}} \Big/ \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}$.

▸ Exercice 9

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)$ d'où $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)\,\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
2. En partitionnant B avec A et $\overline{A}$ au dénominateur, on trouve $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})} = 1 - \frac{\mathbb{P}(B \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}$.
   De façon plus générale, pour une partition $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on a :

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

▸ Exercice 10

1. Notons D l'évènement « Tous les anniversaires sont distincts ».

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{365}{m} m!}{365^m} = 1(1 - \frac{1}{365})(1 - \frac{2}{365}) \ldots (1 - \frac{m-1}{365})$$

2.

$$\mathbb{P}(D) = \prod_{j=1}^{m-1} \underbrace{(1 - \frac{j}{365})}_{\approx e^{-\frac{j}{365}} \text{ si } j \ll 365} \approx e^{-\sum_{j=1}^{m-1} \frac{j}{365}} \approx e^{-\frac{m(m-1)}{2 \cdot 365}} \approx e^{-\frac{m^2}{730}}$$

   D'où pour $m \geqslant \sqrt{730 \log 2} \approx 23$, $\mathbb{P}(D) > \frac{1}{2}$.

▸ Exercice 11

1. La probabilité qu'un enfant soit un garçon est $\frac{1}{2}$.
2. Considérons les quatre configurations possibles : FF, FG, GF GG. Comme il y a déjà une fille, la dernière est éliminée. Parmi 2 des 3 restantes, il y a un garçon et une fille. D'où une probabilité de $\frac{2}{3}$.
3. La distinction entre ces deux réponses vient de l'indistinguabilité des enfants. Dans le premier cas, on suppose que l'on sait quel enfant est un fille, l'aîné ou le cadet, alors que dans le second on ne sait pas de qui il s'agit.

▸ Exercice 12

En disant que l'on regarde la troisième pièce, on acquiert l'information que les deux autres sont sur la même face. Ainsi, avoir la deuxième et la troisième pièces sur le même côté implique nécessairement qu'il en est de même de la première. Or la probabilité que deux pièce soient sur le même côté est de $\frac{1}{2}$. Le côté paradoxal vient du fait qu'on acquiert de l'information sur l'ensemble des trois pièces sans en obtenir sur l'une d'entre elles.

▸ Exercice 13

Il s'agit ici de faire un calcul d'espérance. Les séquences de jeu sont de la forme $P^n F, n \in \mathbb{N}$ et l'on y gagne 2^n euros. La probabilité d'une telle séquence est $\frac{1}{2^{n+1}}$ par indépendance des lancers. L'espérance totale est

$$\mathbb{E}(\text{jeu}) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^n \cdot \mathbb{P}(P^n F) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2} = +\infty$$

Ainsi, pour n'importe quelle mise finie, il est avantageux de jouer. La plupart des personnes refuseront de jouer une somme arbitraire même si les probabilités leur donnent tort, un phénomène qu'on appelle l'*aversion au risque*. Il est également peu vraisemblable que la banque puisse payer une somme arbitraire, et si M est la somme maximum qu'elle peut dépenser, la mise initiale qui équilibre le jeu est $\log M$.

▸ Exercice 14

Au début du jeu, toutes les portes sont équiprobables pour le candidat. La porte choisie initialement a donc une probabilité $\frac{1}{3}$ de contenir la voiture. Lorsque le présentateur ouvre l'une des deux portes restantes, l'information que l'on acquiert ne concernes que ces deux portes et non celle choisie par le candidat (car cette dernière ne peut être choisie). Ainsi la porte initialement choisie a toujours une probabilité $\frac{1}{3}$ de contenir la voiture et la seconde qui reste fermée a donc une probabilité $\frac{1}{3}$ de la contenir. Le candidat a intérêt à changer de porte.

▸ Exercice 15

De même que dans l'exercice sur les deux enfants, il y a deux réponses possible suivants le point de vue que l'on prend : $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$. Bien que ce problème ait maintenant plus d'une dizaine d'année, il n'y a pas encore de consensus sur la réponse à donner. Voir par exemple l'article de synthèse suivant (en français).

▸ Exercice 16

1. Cela est faux en général, par exemple prendre $Y = X$ qui suit une loi de Bernoulli. On a alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) = p \neq p^2 = \mathbb{E}(X)^2$.
2. Si on prend $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.
3. Une condition suffisante pour avoir l'égalité est l'indépendance de X et Y :

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f_{X\times Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} y f(y) \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} y f(y)\mathbb{E}(X)\ \mathrm{d}y = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

On utilise dans cette preuve $f_{X\times Y}$ la loi jointe de X et Y (qui se ramène au produit de f_X et f_Y car X et Y sont indépendants) et le fait que $g(x, y) = xy$ soit mesurable (sur la tribu produit) qui nous donne que $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x, y) f X \times Y(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

▸ Exercice 17

1. $$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mathbb{E}(X)\,X + \mathbb{E}(X)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$
2. Comme X et Y sont indépendants, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}\left((X + Y)^2\right) - \mathbb{E}(X + Y)^2 = \mathbb{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - (\mathbb{E}(X)^2 + 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)\end{aligned}$$

3. Comme contre-exemple, on peut prendre $Y = -X$. Dans ce cas, $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(0) = 0$ qui n'est en général pas égal à $\mathrm{Var}(X)$.

▸ Exercice 18

1. $$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{(tX)^k}{k!}\right) = \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}\left(X^k\right) \frac{t^k}{k!} \tag{1}$$

   Il faut justifier l'inversion entre somme et espérance (intégrale). Cela se fait de manière classique par le duo des théorèmes de Fubini-Tonelli et de Fubini. On rappelle qu'il faut pour cela vérifier la σ-finitude des mesures, *i.e.* l'existence d'une famille dénombrable couvrant l'espace total et dont tous les termes sont de mesure finie. C'est automatiquement vérifié pour une mesure de probabilité (elle est finie) et vrai pour la mesure de comptage (qui correspond à la somme) en prenant les segments $[\![-n, n]\!]$.
2. $$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tY}\right) = M_X(t)M_Y(t) \tag{2}$$

   Il faut justifier l'indépendance de e^{tX} et e^{tY} à partir de celle de X et Y. Deux façons pour cela :
   – ou bien dire que si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X^k \perp\!\!\!\perp Y^m$ pour tout k et m dans $\mathbb{N}$ puis utiliser la linéarité de l'espérance,
   – ou bien utiliser la caractérisation suivante de l'indépendance : $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall g\, h$ mesurables, $\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\,\mathbb{E}(h(Y))$ et prendre $g = h = x \mapsto \mathrm{e}^{tx}$.

▸ Exercice 19

1. La loi de Bernoulli est caractérisée par $\mathbb{P}(\mathcal{B}_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\mathcal{B}_n = 0) = 1 - p$.
2. $$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathcal{B}(p)) &= 1 \cdot \mathbb{P}\left(\mathcal{B}_p = 1\right) + 0 \cdot \mathbb{P}\left(\mathcal{B}_p = 0\right) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p \\ \mathrm{Var}(\mathcal{B}(p)) &= \mathbb{E}\left(\left(\mathcal{B}_p - \mathbb{E}\left(\mathcal{B}_p\right)\right)^2\right) = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) = (1 - p)^2 p + p^2(1 - p) = p(1 - p)(1 - p + p) = p(1 - p)\end{aligned}$$

3. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors

$$M_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}\left(X^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}(0^k \cdot (1-p) + 1^k \cdot p) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}p \quad + 0^0 \cdot (1-p) = 1-p+p\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} = 1-p+pe^t$$

▸ **Exercice 20**

1. Pour avoir $X_n = k$, il faut avoir k succès parmi les n possibles. Cela nous donne $\binom{n}{k}$ possibilités, chacune arrivant avec probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ car les lancers sont indépendants. D'où

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(n,p)=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

2. On peut utiliser la linéarité de l'espérance et le fait que $\mathcal{B}(n,p) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{B}(p)$ pour avoir directement que $\mathbb{E}(\mathcal{B}(n,p)) = np$. De même, comme chacun des lancers est indépendants on a également $\mathrm{Var}(\mathcal{B}(n,p)) = n\,\mathrm{Var}(\mathcal{B}(p)) = np(1-p)$.
   Un calcul direct est cependant possible :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathcal{B}(n,p)) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(\mathcal{B}(n,p)=1) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k}\\ &= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}\\ &= np\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np(P+1-p)^n = np\end{aligned}$$

   Pour le calcul direct de la variance, il faut utiliser la linéarité de la dérivation et l'égalité suivante : $kx^k = x\left(x^k\right)'$.

3. Par indépendance des tirages, on a $M_{\mathcal{B}(n,p)}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{\mathcal{B}(p)}(t) = (1-p+pe^t)^n$

▸ **Exercice 21**

1. Posons $c = np$. On a $p = \frac{a}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{B}(n,p)=k) &= \binom{k}{n} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n^k}{k!}\underbrace{\left(\prod_{i=0}^{k}(1-\frac{i}{n})\right)}_{\xrightarrow{n\to+\infty}1} p^k(1-p)^n \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\xrightarrow{n\to+\infty}1}\\ &\sim \frac{c^k}{k!}(1-p)^n = \frac{c^k}{k!}\left(1-\frac{c}{n}\right)^n \to \frac{c^k}{k!}e^{-c}\end{aligned}$$

2. Il s'agit de vérifier que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda)=k) = 1$.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda)=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

3.

$$\mathbb{E}(\mathcal{P}(\lambda)) = \sum_{k\geqslant 0} k \cdot \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda)=k) = \sum_{k\geqslant 0} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k\geqslant 1} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k\geqslant 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda)=k) = \lambda$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathcal{P}(\lambda)) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\,\mathbb{P}(X=k) - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda\,e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2\\ &= \lambda\,e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda\left(e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) - \lambda^2 = \lambda(\mathbb{E}(\mathcal{P}(\lambda))+1) - \lambda^2 = \lambda\end{aligned}$$

4.
$$M(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{tk}\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{tk}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda \mathrm{e}^t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}$$

5. On va utiliser la fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}$.
$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(e^t-1)}\mathrm{e}^{\mu(e^t-1)} = \mathrm{e}^{\lambda(e^t-1)+\mu(e^t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}$$
On reconnaît alors la fonction génératrice des moments d'une loi de Poison de paramètre $\lambda + \mu$.

▸ **Exercice 22**

1. Les $k-1$ premiers lancers tombent sur face et le k^{e} sur pile d'où, par indépendance des lancers,
$$\mathbb{P}(Y=k) = (1-p)^{k-1}p$$

2.
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{+\infty} -((1-p)^k)' = p\left(-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right)' = p\left(-\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}(Y)^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\cdot(1-p)^{k-1}p - \frac{1}{p^2} = p\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^k\right)' - \frac{1}{p^2} = p\left((1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}\left((1-p)^k\right)'\right)' - \frac{1}{p^2}\\
&= p\left((1-p)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right)'\right)' - \frac{1}{p^2} = p\left((1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)'\right)' - \frac{1}{p^2} = p\left(\frac{-p(1-p)-(1-p)^2}{p^2}\right)' - \frac{1}{p^2}\\
&= -p\left(\frac{(1-p)(p+(1-p))}{p^2}\right)' - \frac{1}{p^2} = -p\left(\frac{1-p}{p^2}\right)' - \frac{1}{p^2} = -p\frac{-p^2-2p(1-p)}{p^4} - \frac{1}{p^2} = p\frac{p^2+2p-2p^2}{p^4} - \frac{1}{p^2}\\
&= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

3.
$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left(e^{Yt}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{k=0}^{+\infty}((1-p)e^t)^k = \frac{p}{1-p}\frac{1}{1-(1-p)e^t} = \frac{pe^{-t}}{(1-p)e^{-t}-(1-p)^2}$$

4.
$$\mathbb{P}(X>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=n}^{+\infty}(1-p)^k = p(1-p)^n\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = p(1-p)^n\frac{1}{p} = (1-p)^n$$
On obtient alors sans peine
$$\mathbb{P}(X=n+k\,|\,X>k) = \frac{\mathbb{P}(X=n+k)}{\mathbb{P}(X>k)} = \frac{(1-p)^{n+k-1}p}{(1-p)^k} = (1-p)^{n-1}p = \mathbb{P}(X=n)$$

▸ **Exercice 23**

1. En posant $u = \lambda x$,
$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^+}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^+}\lambda\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\lambda} = \int_{\mathbb{R}^+}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 1$$

2.
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}^+} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^+} x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}^+}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^+} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}^+} x^2f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^+} x^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}^+} 2x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{\mathbb{R}^+} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}\,\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$
d'où $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

3.

$$\mathbb{P}(X > b) = \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_b^{+\infty} = \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(X > a+b \,|\, X > b) = \frac{\mathbb{P}(X > a+b \wedge X > b)}{\mathbb{P}(X > b)} = \frac{\mathbb{P}(X > a+b)}{\mathbb{P}(X > b)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(a+b)}}{\mathrm{e}^{-\lambda b}} = \mathrm{e}^{-\lambda a} = \mathbb{P}(X > a)$$

4. Notons $F(a) = \mathbb{P}(X \geqslant a)$. D'après la question précédente, on a $F(a+b) = F(a)F(b)$ dont les solutions sont de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction de densité est alors $f(a) = (\mathbb{P}(X \leqslant a))' = (1 - F(a))' = -\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha a}$ et on retrouve une loi exponentielle de paramètre $\lambda = -\alpha$.

▸ Exercice 24

1. On suppose connue la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. C'est un exercice classique de prépa qui peut se démontrer par intégrale double et passage en coordonnée polaire ou par décomposition en série de Fourier.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sigma\,\mathrm{d}u = 1$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} (x+m)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + m\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[-\sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + m = m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} x\cdot x\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[-x\sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma^2\end{aligned}$$

3. Ce résultat peut se montrer soit directement par convolution soit en utilisant la fonction caractéristique.
4.

$$\int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2\sigma}^{2\sigma} f(x+m)\,\mathrm{d}x = \int_{-2\sigma}^{2\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_2^2 \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}x = F(2) - F(-2)$$

où F est la fonction de répartition de f. Par parité de f, on sait que $F(-x) = 1 - F(x)$ et on cherche donc à évaluer $2F(2) - 1$. On connaît des approximations de F (par développement en série de Taylor) dont il existe des tables. On trouve alors $F(2) \approx 0.97725$ donc $2F(2) - 1 \approx 0,9545$. Ainsi, la loi normale prend 95% de ses valeurs dans l'intervalle $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$.