TD 12 : Unification et terminaison

{lionel.rieg,paolo.tranquilli}@ens-lyon.fr

Exercice 1. *Unification modulo commutativité*

Étant donnée une algèbre de termes $\mathcal{T} = T(\Sigma, V)$, on appelle un *axiome* une paire $u \doteq v$ avec $u, v \in \mathcal{T}$ et $\mathrm{Var}(u) = \mathrm{Var}(v)$. Étant donné un ensemble d'axiomes $E = \{ u_1 \doteq v_1, \dots u_k \doteq v_k \}$ on denote par $=_E$ (*égalité modulo* E) la plus petite relation d'équivalence sur $T(\Sigma, V)$ telle qui est stable par substitution et compatible.

1. Donner la définition des notion ci-dessus en termes de réécriture.

2. Étant donné un problème équationnel P, formaliser la notion d'unificateur modulo un ensemble d'axiomes E.

On va s'intéresser en particulier au cas de la commutativité. Étant donné $\Pi \subseteq \Sigma \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$, soit C_Π l'ensemble

$$C_\Pi = \{ f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) \doteq f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_k) \mid f \in \Pi, 1 \leq i < k \}.$$

Par exemple si $\Sigma = \{ 0 : 0, S : 1, + : 2 \}$, alors $C_{\{+\}} = \{ x_1 + x_2 \doteq x_2 + x_1 \}$.
On se propose d'étudier en général le problème de l'unification modulo C_Π.

3. L'equation $S(x) + (y + z) \stackrel{?}{\doteq} (x + S(x)) + y$ est-elle unifiable sans commutativité ? Et modulo $C_{\{+\}}$?

4. Est-ce que si P est unifiable modulo C_Π il en existe un unificateur le plus général ?

5. Élaborez une méthode pour trouver tous les unificateurs d'un problème équationnel P modulo C_Π, en en prouvant correction et complétude.

Exercice 2. *Interprétations Polynomiales*

1. Prenons pour algèbre l'ensemble des entiers naturels strictement positifs $\mathbb{N}^*$, muni de l'ordre usuel, et interprétons chaque symbole d'une signature Σ par un polynôme. Quelles conditions faut-il imposer pour obtenir un ordre de réduction sur l'algèbre des termes $\mathcal{T}$?

2. Montrer que plutôt que $\mathbb{N}^*$, on peut prendre $\mathbb{N}_{>a} = \{ n \in \mathbb{N} \mid n > a \}$.

3. Pour chacun des systèmes suivants, déterminer s'il termine ou non.

a) $\begin{cases} x + 0 \to x \\ x + S(y) \to S(x + y) \\ x \times 0 \to 0 \\ x \times S(y) \to (x \times y) + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \neg\neg x \to x \\ \neg(x \vee y) \to (\neg x) \vee (\neg y) \\ \neg(x \wedge y) \to (\neg x) \wedge (\neg y) \\ x \wedge (y \vee z) \to (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ (x \vee y) \wedge z \to (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \neg\neg x \to x \\ \neg(x \wedge y) \to (\neg x) \vee (\neg y) \\ \neg(x \vee y) \to (\neg x) \wedge (\neg y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(f(x, y), z) \to f(x, f(y, z)) \\ f(x, f(y, z)) \to f(y, y) \end{cases}$

e) $\left\{\begin{array}{r} or(x,y) \to x \\ or(x,y) \to y \\ f(a,b,x) \to f(x,x,x) \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{r} a(0,x) \to s(x) \\ a(s(x),0) \to a(x,s(0)) \\ a(s(x),s(y)) \to a(x,a(s(x),y)) \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{r} x+0 \to x \\ x+S(y) \to S(x+y) \\ x \times 0 \to 0 \\ x \times S(y) \to (x \times y) + x \\ p(S(n)) \to p(n) \times S(S(0)) \end{array}\right.$

4. Prouver que si un système de réécriture R peut être prouvé terminant grâce à cette méthode, alors on peut trouver une constante $c > 0$ telle que pour tout terme t, on peut borner le nombre de réductions à partir de t par $2^{2^{c|t|}}$.

Indice : Soit $a \in \mathcal{A}$, prendre $c \geqslant km + \log d$ avec k, m et d tels que

$$a \leqslant d \text{ et } \forall f \in \Sigma_h : f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_h) \leqslant d \cdot \prod_{i=1}^{h} {a_i}^k \text{ et } h \leqslant m$$

et essayez de borner $\pi_a(t)$ où π_a est le morphisme qui envoie toutes les variables sur a.

5. En déduire que vous ne pouviez pas faire les deux derniers exemples avec cette méthode.

Exercice 3. *Ordre lexicographique sur les chemins*

Soit Σ une signature finie, et $\leqslant$ un préordre sur Σ. L'ordre *lexicographique sur les chemins* $<_{lpo}$ est défini par $s <_{lpo} t$ si $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ et

(Sous-terme) $\exists j, s \leqslant_{lpo} t_j$ ou

$s = f(s_1, \ldots, s_m)$, $\forall i, s_i <_{lpo} t$ et

(Precedence) $f < g$ ou

(Lexico) $f \simeq g$ et $(s_1, \ldots, s_m) <_{lpo}^{lex} (t_1, \ldots, t_n)$.

1. Montrer que cette définition est calculable. Dresser ensuite une ébauche de la preuve que l'ordre lpo est un ordre de réduction.

2. Prouver la terminaison des systèmes suivants :

a) $\left\{\begin{array}{r} a(0,x) \to s(x) \\ a(s(x),0) \to a(x,s(0)) \\ a(s(x),s(y)) \to a(x,a(s(x),y)) \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} x*(y+z) \to (x*y)+(x*z) \\ (x+y)*z \to (x*z)+(y*z) \\ x*1 \to x \\ 1*x \to x \end{array}\right.$

c) $i(i(x,y,z),x',z') \to i(x,i(y,x',z'),i(z,x',z'))$

d) $\left\{\begin{array}{r} h(x,x,y) \to g(x) \\ g(a) \to h(a,b,a) \\ i(x) \to f(x,x) \\ f(x,y) \to x \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{r} (x*y)*z \to x*(y*z) \\ f(x*y) \to f(x)*f(y) \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{r} (x*y)*z \to x*(y*z) \\ f(x)*f(y) \to f(x*y) \\ f(x*y)*z \to f(x)*(f(y)*z) \end{array}\right.$