# TD 10 : Réécriture

{lionel.rieg,paolo.tranquilli}@ens-lyon.fr

**Exercice 1.** *Relations abstraites*

Soit $X$ un ensemble quelconque, et notons $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X^2)$ l'ensemble des *relations binaires* sur $X$ (aussi appelées *réductions*). On notera par $\to$ les éléments de $\mathcal{R}$ et par $x \to y$ l'appartenance du couple $(x, y)$ à la relation $\to$. La composée de deux relations sera notée par la juxtaposition : $\to_1\to_2 = \{ (x, z) \mid \exists y, x \to_1 y \to_2 z \}$.
Soit P un prédicat sur les relations binaires ($\mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$).

**1.** Qu'est-ce que la clôture d'une relation $R$ vis à vis de P ? Que doit satisfaire P ?

Soit $\to$ une relation ; on note :

| | | |
|---|---|---|
| $\leftarrow$ | sa relation converse | $(\leftarrow = \{ (x, y) \mid y \to x \})$ ; |
| $\to^=$ | sa clôture réflexive ; | |
| $\to^+$ | sa clôture transitive ; | |
| $\to^*$ | sa clôture réflexive et transitive ; | |
| $\leftrightarrow$ | sa clôture symétrique ; | |
| $\leftrightarrow^*$ | sa clôture réflexive, symétrique et transitive. | |

La réduction $\to$ :
- est *confluente* si $\leftarrow^*\to^* \subseteq \to^*\leftarrow^*$ ;
- est *semi-confluente* si $\leftarrow\to^* \subseteq \to^*\leftarrow^*$ ;
- est *localement confluente* si $\leftarrow\to \subseteq \to^*\leftarrow^*$ ;
- possède la *propriété du diamant* si $\leftarrow\to \subseteq \to\leftarrow$.

**2.** Dessinez des "diagrammes" correspondant à ces quatre notions. Qui implique qui ? Quel est l'intérêt de la confluence ?

On appele *forme normale* un élément $x$ de $X$ tel qu'il n'existe aucun $y$ tel que $x \to y$.
La réduction $\to$ est dite :
- *nœthérienne* s'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i$, $x_i \to x_{i+1}$ ;
- *normalisante* si tout élément $x$ admet une forme normale ($x \to^* y \not\to$) ;
- *convergente* si elle est confluente et nœthérienne ;
- *acyclique* s'il n'existe pas d'élément $x$ tel que $x \to^+ x$ ;
- *finitaire* (ou *à branchement fini*) si pour tout élément $x$ l'ensemble $\{ y \mid x \to y \}$ est fini ;
- *globalement finie* si pour tout élément $x$ l'ensemble $\{ y \mid x \to^+ y \}$ est fini ;
- *bornée* si pour tout $x$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel qu'il n'existe pas de $y$ tel que $x \to^{n_x} y$.

**3.** Comparer les relations suivantes :

a) $\to^*$, $(\to^+)^=$ et $(\to^=)^+$.

b) $\leftrightarrow^+$ et la clôture symétrique de $\to^+$.

c) $\leftrightarrow^=$ et la clôture symétrique de $\to^=$.

Dans les questions qui suivent, prouver les affirmations correctes ou donner un contre-exemple dans le cas contraire.

**4.** Terminaison comparée.

a) Une réduction nœthérienne est-elle normalisante ? Et réciproquement ?

b) On suppose que $\rightarrow$ est telle que tout élément admet une et une seule forme normale. Est-elle confluente, nœthérienne ?

**5.** Et réciproquement.

a) Une réduction normalisante, confluente et acyclique est-elle nœthérienne ?

b) Une relation bornée est-elle nœthérienne ?

c) Une relation globalement finie est-elle bornée ? Est-elle nœthérienne ?

d) Une relation dont la clôture réflexive et transitive est nœthérienne est-elle confluente ?

e) Reposez la question précédente.

**6.** Finitaire.

a) On suppose que $\rightarrow$ et $\rightarrow^*$ sont finitaires. $\rightarrow$ est-elle nœthérienne ? normalisante ?

b) On suppose $\rightarrow$ acyclique et $\rightarrow^*$ finitaire. $\rightarrow$ est-elle nœthérienne ? normalisante ?

## Exercice 2. *Ordre multi-ensemble*

**1.** Soit $(X, >)$, un ensemble ordonné, rappeler la définition de $>_{mul}$ extension de $>$ sur les multiensembles à support fini d'éléments de $X$.

**2.** Donner une définition plus simple quand $>$ est total.

**3.** Montrer que $>$ bien-fondé implique $>_{mul}$ bien-fondé.

## Exercice 3. *Fonction 91 de Mac Carthy*

Soit $f$ et $g$ les deux fonctions suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} f(f(n+11)) & \text{si } n \leq 100 \\ n - 10 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 91 & \text{si } n \leq 100 \\ n - 10 & \text{sinon} \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est totale et que $f$ est égale à $g$.

**2.** Montrer que le programme impératif suivant calcule $f$.

```
int Carthy91 (int n) {
  int i = 1;
  int m = n;
  while (i > 0) do {
    if (m > 100) {
      i--;
      m := m - 10;
    } else {
      i++;
      m := m + 11;
    }
  }
  return m;
}
```