TD 9 : Révisions

{lionel.rieg,paolo.tranquilli}@ens-lyon.fr

Exercice 0. *Rappels*

N'hésitez pas à énoncer toute question sur la *logique* et la *calculabilité* qui vous turlupine et que vous n'avez jamais osé poser.

Exercice 1. *Logique*

1. Soit la formule $((p \to q \to r) \to ((p \to q) \to p \to r) \to s) \to (p \to q \to r) \to s$.
En donner une preuve dans NJ. La traduire en un λ-terme à travers la correspondance de Curry-Howard puis en donner une preuve dans le calcul de Hilbert.
(indication : passer par la logique combinatoire)

2. Prouver la formule $(p \to (q \vee r \vee s)) \to ((p \to q) \vee (p \to r) \vee (p \to s))$ dans LK et montrer que ce n'est pas un théorème de NJ.

Exercice 2. *Calculabilité*

On note $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des définitions de fonctions récursives $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

1. Soit F la suite de Fibonacci : $\begin{cases} F(0) = F(1) = 1 \\ F(n+2) = F(n) + F(n+1) \end{cases}$

Montrer que F est récursive primitive et donner en donner une écriture récursive primitive.
(on pourra utiliser sans justification les fonctions récursives primitives vues en TD).

2. Les ensembles suivants sont-ils récursifs ? récursivement énumérables ? co-récursivement énumérables (c.-à-d. de complémentaire récursivement énumérable) ?

a) $\{\, i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(1664)$ n'est pas défini $\}$

b) $\{\, x \in \mathbb{N} \mid \varphi_{1664}(x) = 51 \,\}$

c) $\{\, \langle i, j\rangle \mid \varphi_i = \varphi_j \,\}$

d) $\{\, i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(x) = 1664$ si $\varphi_x(x)$ est définie et 51 sinon $\}$

3. Montrer que si on se donne une machine résolvant le problème de l'arrêt, on peut l'utiliser pour construire une machine résolvant la conjecture de Goldbach. La conjecture de Goldbach affirme que tout entier pair est la somme de deux nombres premiers.

4. Montrer que si on se donne une machine résolvant le problème de l'arrêt, on peut l'utiliser pour construire une machine résolvant la conjecture de Syracuse. La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier a la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n/2$ si u_n est pair et $3u_n + 1$ sinon atteint 1 pour un certain n.

5. Existe-t-il $m \in \mathbb{N}$ tel que φ_m ait comme domaine $\mathbb{N} \setminus \{\, m \,\}$?

Exercice 3. *Automates cellulaires*

Un automate cellulaire est un modèle de calcul défini sur une grille $\mathbb{Z}^d$ dans lequel chaque case est dans un état qui évolue selon un nombre fini de règles locales. Ces règles dépendent d'un *voisinage*, identique pour toutes les cases d'un automate donné.

1. Formaliser la notion d'automate cellulaire.

Un exemple très connu est celui du *jeu de la vie* de J. H. CONWAY dans lequel les cellules ont deux états : vivante ou morte et évoluent en fonction du nombre de voisines vivantes :

- une cellule naît si elle possède exactement 3 voisines vivantes ;
- une cellule reste vivante si elle possède deux ou trois voisines vivantes.

2. Donner la description formelle du jeu de la vie.

3. Montrer *précisément* que déterminer si un automate cellulaire s'arrête ou non sur une configuration donnée est un problème indécidable.