# TD 7 : Fonction d'Ackermann, problème du mot, $\lambda$-définissabilité

{lionel.rieg,paolo.tranquilli}@ens-lyon.fr

**Exercice 1.** *Hacker-man 2 : le retour*

La fonction d'Ackermann-Péter est définie par :

$$\begin{array}{ll} A(0,n) & = n+1 \\ A(m+1,0) & = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) & = A(m, A(m+1,n)) \end{array}$$

**1.** Donner les expressions explicites de $A(1,x)$, $A(2,x)$ et $A(3,x)$.

**2.** Que vaut $A(4,x)$ ?

**3.** Montrer que :
- $A(p,x) > x$ ;
- $A$ est strictement croissante en chacune de ses variables ;
- $A(p+1,x) > x + A(p,x)$ pour $p \geq 1$ ;
- $A(p,x+1) \leq A(p+1,x)$.

**4.** Montrer que pour toute fonction récursive primitive $f$, il existe $p_f$ tel que

$$\forall x_1,\ldots,x_k, f(x_1,\ldots,x_k) < A(p_f, \max(x_1,\ldots,x_k))$$

**5.** En déduire que la fonction $A$ n'est pas récursive primitive.

**Exercice 2.** *Le problème du mot*

Étant donnée une machine de Turing déterministe à bande infinie à droite $M = (Q,\Sigma,\Gamma,E,q_0,\{q_+\})$, on veut définir un semi-groupe $S_M$ ayant pour générateurs l'alphabet $Q\cup\Gamma\cup\{B\}$ (avec $B \notin Q\cup\Gamma$) où l'on puisse écrire les configurations [1] de $M$ et définir une relation qui en simule les transitions.

**1.** Définir une relation $R$ sur les générateurs de $S_M$ telle que $CB =_R C'B$ en une étape si et seulement si $C \xrightarrow{M} C'$ où bien $C' \xrightarrow{M} C$, et prouver cette propriété. Expliquer pourquoi il est nécessaire d'ajouter le délimiteur $B$.

**2.** Définir une relation $R'$ telle que $CB =_{R'} q_+$ ssi $C$ est une configuration acceptante.

**3.** Quelle forme a un mot $\texttt{init}(w)$ de $(Q\cup\Gamma\cup\{B\})^*$ qui correspond à une configuration initiale de la machine sur l'entrée $w$ ?

**4.** Montrer que $w \in L(M)$ si et seulement si $\texttt{init}(w) =_{R\cup R'} q_+$.

1. Rappel : une configuration de $M$ est de la forme $uqv$ où $q$ est l'état courant et $u$ (resp. $v$) est la portion de bande strictement à gauche de la tête (resp. une portion de la bande contenant tous les caractères non nuls à droite de la tête).

**5.** Quelle réduction de problème de décision a-t-on fait ? Énoncer le résultat d'indécidabilité qui en découle.

**6.** Définir une nouvelle construction $S'_M$ d'un semi-groupe à partir de $M$ qui peut remplacer $S_M$ dans la preuve mais qui minimise le nombre de générateurs. Combien de générateurs sont nécessaires ? Que se passe-t-il avec moins de générateurs ?

**7.** Est-ce qu'il existe un semi-groupe fixé $S$ pour le quel le problème du mot est indécidable ?

## Exercice 3. *$\lambda$-définissabilité*

**1.** Rappeler la définition de $\lambda$-définissabilité.

**2.** Retrouver :
– le codage des entiers,
– la $\lambda$-définition du successeur et du prédécesseur,
– la $\lambda$-définition de l'addition
vus en cours.

**3.** Montrer que la multiplication est $\lambda$-définissable.