TD 6 : Minimisation et fonction d'Ackermann

{lionel.rieg,paolo.tranquilli}@ens-lyon.fr

Exercice 1. *Tout en une boucle*

Théorème. *Toutes les fonctions récursives peuvent s'écrire avec une seule utilisation de l'opérateur de minimisation.*

Pour montrer ce théorème, on va faire un gros détour : on prouvera que chaque fonction programmable avec une RAM peut être écrite sous cette forme.

1. En quoi cela suffit-il ?

2. Montrer qu'il existe $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ des fonctions récursives primitives telles que $\beta(\pi_1(x), \pi_2(x)) = x$, $\pi_i(\beta(x_1, x_2)) = x_i$ et $\beta(0, 0) = 0$.

On va coder les registres R_i par un entier avec

$$\beta'(R) = \beta(R_0, \beta(R_1, \cdots \beta(R_n, 0) \cdots))$$

si $R_i = 0$ pour tous $i > n$.

3. Est-ce que β' est bien définie sur les suites R_i nulle à partir d'un certain rang ?

4. Écrire des fonctions récursives primitives :
– $\texttt{get}(x, i)$ telle que $\texttt{get}(\beta'(R), i) = R_i$;
– $\texttt{upd}(x, i, y)$ telle que $\texttt{upd}(\beta'(R), i, y) = \beta'(R[i \mapsto y])$.

5. Montrer que la fonction $\texttt{case}(g_0, g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ avec $g_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ définie par

$$\texttt{case}(g_0, \ldots, g_n)(i, \vec{x}) = \begin{cases} g_i(\vec{x}) & \text{si } i < n \\ g_n(\vec{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

est récursive primitive si les g_i le sont.

6. Étant donné un programme RAM P, montrer qu'il existe une fonction récursive primitive $\texttt{line}_P(i, x)$ qui donne la prochaine ligne de P à exécuter si i est la ligne courante (comprise entre 1 et $|P|$) et $x = \beta'(R)$ code la configuration courante des registres, et qui vaut 0 si la ligne à exécuter est `stop`.

7. Refaire la question précédente pour la fonction $\texttt{reg}_P(i, x)$ qui donne le nouveau codage des registres.

8. Montrer enfin le théorème.

Exercice 2. *Hacker-man*

La fonction d'Ackermann-Péter est définie par :

$$\begin{array}{ll} A(0,n) & = n+1 \\ A(m+1,0) & = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) & = A(m,A(m+1,n)) \end{array}$$

1. Donner les expressions explicites de $A(1,x)$, $A(2,x)$ et $A(3,x)$.

2. Que vaut $A(4,x)$?

3. Montrer que :
- $A(p,x) > x$;
- A est strictement croissante en chacune de ses variables ;
- $A(p+1,x) > x + A(p,x)$ pour $p \geq 1$;
- $A(p,x+1) \leq A(p+1,x)$.

4. Montrer que pour toute fonction récursive primitive f, il existe p_f tel que

$$\forall x_1,\ldots,x_k, f(x_1,\ldots,x_k) < A(p_f, \max(x_1,\ldots,x_k))$$

5. En déduire que la fonction A n'est pas récursive primitive.

Exercice 3. *We shall Rice again*

1. Reformuler et prouver le théorème de Rice dans le cadre des fonctions récursives.

2. Les propriétés suivantes sont-elles décidables ?

a) f est une fonction récursive qui prend la valeur 0 au moins une fois.

b) f est une fonction récursive qui ne prend jamais la valeur 0.

c) Sachant que f est récursive, f est primitive récursive.