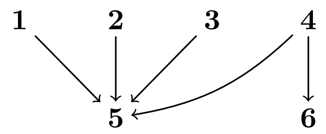
TD 3: Modèles de Kripke et traduction de Gödel

{lionel.rieg,paolo.tranquilli}@ens-lyon.fr

Exercice 1. *Mise en bouche*

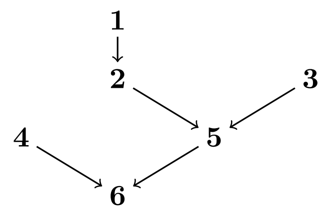
1. Rappeler la définition des modèles de Kripke.

Soit l'univers $\mathcal{M}_1$:



avec $\mathbf{3} \Vdash X, \mathbf{5} \Vdash Y, \mathbf{6} \Vdash Y$

et l'univers $\mathcal{M}_2$:



avec $\mathbf{1} \Vdash Y, \mathbf{2} \Vdash X, \mathbf{4} \Vdash Z$

2. Préciser quels mondes des univers $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ forcent les formules suivantes :

$$X \qquad Y \qquad Z \qquad \neg X \qquad \neg Y \qquad \neg Z \qquad X \to Y \qquad Y \to X \qquad X \wedge Y \qquad X \vee Y$$
$$X \to Y \to X \qquad (\neg X \to X) \to X \qquad Z \to X \qquad Z \to Y \qquad \bot \qquad Z \vee X$$
$$(X \to Y \to Z) \to (X \to Y) \to X \to Z$$

3. Prouver que pour toute formule A, si $u \Vdash A$ et $v \geq u$ alors $v \Vdash A$.

4. Pour chacune des formules suivantes, donner une preuve en calcul des séquents classique et un contre-modèle de Kripke :

$$\neg\neg X \to X \qquad \neg X \vee \neg\neg X \qquad (\neg X \to \neg Y) \to Y \to X$$
$$(X \to Y) \vee X \vee \neg Y \qquad (X \to Y) \to \neg X \vee Y$$

Exercice 2. *Zig-zag morphisme*

Soient $\mathcal{K}_1 = (|\mathcal{K}_1|, \leq_1, \Vdash_1)$ et $\mathcal{K}_2 = (|\mathcal{K}_2|, \leq_2, \Vdash_2)$ deux modèles de Kripke du calcul propositionnel. Un *zig-zag morphisme* est une fonction ϕ de $|\mathcal{K}_1|$ dans $|\mathcal{K}_2|$ telle que
- ϕ est croissante,
- Pour tout $u_1 \in |\mathcal{K}_1|$, $u_1 \Vdash_1 X$ ssi $\phi(u_1) \Vdash_2 X$,
- Pour tout $u_1 \in |\mathcal{K}_1|$ et tout $v_2 \in |\mathcal{K}_2|$ tel que $\phi(u_1) \leq_2 v_2$, il existe $v_1 \geq u_1$ tel que $\phi(v_1) = v_2$.

Montrer que si ϕ est un zig-zag morphisme, $u_1 \in |\mathcal{K}_1|$ et A est une formule, on a $u_1 \Vdash_1 A$ ssi $\phi(u_1) \Vdash_2 A$.

Exercice 3*. *Modèle syntaxique*

Soit Γ un ensemble de formules. Construisez un modèle de Kripke $\mathcal{K}$ (qui dépend de Γ), tel que pour tout A, $\Gamma \vdash_J A$ si et seulement si $\Vdash_{\mathcal{K}} A$ (on dit d'un tel modèle qu'il est complet pour $\mathcal{K}$).

Exercice 4. *Traduction de Gödel et théorème de Glivenko*

La traduction de Gödel transforme une formule F en F^*, définie inductivement par :

$$\begin{aligned} X^* &= \neg\neg X \\ \bot^* &= \bot \\ (P \wedge Q)^* &= P^* \wedge Q^* \\ (P \vee Q)^* &= \neg(\neg P^* \wedge \neg Q^*) \\ (P \to Q)^* &= P^* \to Q^* \end{aligned}$$

1. Montrer que pour toute formule P on a $\vdash_J P^* \leftrightarrow \neg\neg P$.

2. Déduire du point précédent que $\vdash_{LK} P \leftrightarrow P^*$. Le montrer *sans coupures.*

On dit d'une formule P qu'elle est stable si $\vdash_J P \leftrightarrow \neg\neg P$.

3. Montrer que pour tout P, $\bot$, $\neg P$ et P^* sont stables.

4. Montrer que pour tout P, $\Gamma \vdash_{LK} P$ si et seulement si $\Gamma^* \vdash_J P^*$.

5. Déduire des points précédents que pour tout P, $\Gamma \vdash_{LK} P$ si et seulement si $\Gamma \vdash_J \neg\neg P$.

6*. On se plonge dans le calcul des prédicats (vu ailleurs. . .). Fournir une extension de la traduction définie ci-dessus en définissant $(\forall x.A)^*$ et $(\exists x.A)^*$. Refaire les points 1–5 en considérant le cas des quantificateurs.