TD 2: Déduction naturelle

{lionel.rieg,paolo.tranquilli}@ens-lyon.fr

Exercice 1. *Ouf, déduction naturelle*

Prouver en déduction naturelle les théorèmes suivants.

a) $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,

b) $(P \to \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

c) $(P \to Q) \to \neg Q \to \neg P$,

d) $(P \to Q) \to (P \to \neg Q) \to \neg P$,

e) $(P \vee Q) \to R \leftrightarrow (P \to R) \wedge (Q \to R)$,

f) $(P \to R) \vee (Q \to R) \to P \wedge Q \to R$,

g) $(P \wedge Q \to R) \to (P \to R) \vee (Q \to R)$, en supposant le tiers exclu pour P (c.-à-d. montrer $P \vee \neg P \to (P \wedge Q \to R) \to (P \to R) \vee (Q \to R)$). Est-ce que le tiers exclu est nécessaire ?

h) Montrer $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ en supposant le tiers exclu pour P.

i) $(P \to P \wedge Q) \vee (Q \to P \wedge Q)$, en supposant le principe du tiers exclu pour P.

j) $(P \to \neg\neg Q) \to \neg\neg(P \to Q)$.

Exercice 2. *Interprétation polynomiale et procédure de décision, encore*

L'interprétation usuelle $(\!|\,.\,|\!)$ transforme les formules à n variables en fonctions booléennes à n arguments.

1. Montrer que cette interprétation est surjective, c.-à-d. que toute fonction booléenne à n arguments peut se représenter par une formule à n variables.

On définit une interprétation polynomiale $[\![\,.\,]\!]$ des formules à n variables dans le quotient $\mathcal{F} = \mathbb{F}_2[X_1, \dots, X_n]/(X_i^2 = X_i)$ comme suit :

$$[\![p_i]\!] = X_i \qquad [\![F_1 \wedge F_2]\!] = [\![F_1]\!][\![F_2]\!] \qquad [\![\neg F]\!] = [\![F]\!] + 1$$

2. Donner l'interprétation de $F_1 \vee F_2$, $F_1 \to F_2$ et $\bot$.

3. Ces polynômes peuvent naturellement se voir comme des fonctions polynomiales de $\mathbb{F}_2^n$ dans $\mathbb{F}_2$, c.-à-d. des fonctions booléennes à n arguments. Montrer alors que l'interprétation directe $(\!|F|\!)$ d'une formule F est égale à la fonction polynomiale associée à $[\![F]\!]$.

4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ des fonctions booléennes à n arguments et $\mathcal{F}$ sont en bijection. (indication : la surjectivité peut être déduite des points précédents, et il n'y a pas besoin de montrer l'injectivité directement...)

5. En déduire des algorithmes pour :
- caractériser les tautologies ;
- caractériser les antilogies ;
- déterminer de quelles variables libres dépend vraiment une formule.

Exercice 3. *Équivalence des systèmes, vite faite*

1. Montrer que toute dérivation de $H_1 \cup \Gamma \vdash F$ dans H_1 peut se transformer en une dérivation de $\Gamma \vdash F$ dans NJ.

2. Montrer réciproquement que s'il existe une dérivation de $\Gamma \vdash F$ dans NJ, alors il existe une dérivation de $H_1 \cup \Gamma \vdash F$ dans H_1.
(indication : penser à utiliser le méta-théorème de déduction)

3. En déduire que les théorèmes démontrables dans H_1 et dans NJ sont les mêmes.

4. L'équivalence est-elle conservée pour la logique minimale ?

Exercice 4. *Complétude des modèles booléens*

On se propose de montrer que la déduction naturelle enrichie du principe du tiers exclu est complète pour les modèles booléens.

1. Est-ce vrai si l'on ne considère que la déduction naturelle (c.-à-d. la logique intuitionniste) ?

Si F est une formule et $d : \mathcal{V} \to \{0, 1\}$ une distribution de valeurs de vérité (en abrégé *dvv*) avec $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables propositionnelles, on note $\phi(F, d)$ la formule $\varepsilon_d(p_1) \wedge \cdots \wedge \varepsilon_d(p_n)$ où les p_i sont les variables de F et $\varepsilon_d(p) = p$ si $d(p) = 1$ et $\varepsilon_d(p) = \neg p$ si $d(p) = 0$. Par convention, $\phi(\perp, d)$ est une formule vraie quelconque, par exemple $\perp \to \perp$.

2. Montrez que, pour toute formule A et B et pour tout connecteur $\star \in \{\wedge, \vee, \to\}$, on a $\vdash \phi(A \star B, d) \leftrightarrow \phi(A, d) \wedge \phi(B, d)$ et $\vdash \phi(\neg A, d) \leftrightarrow \phi(A, d)$.

3. Montrer que, pour toute formule F, on a $\vdash \vee\{\, \phi(F, d) \mid d \text{ est une } dvv \,\}$.

4. Montrer, par induction sur F que pour toute *dvv* d, si $(\!| F |\!) d = 1$, alors $\phi(F, d) \vdash F$ et si $(\!| F |\!) d = 0$ alors $\phi(F, d) \vdash \neg F$.

5. Soit F une tautologie. Montrer que $\vee\{\, \phi(F, d) \mid d \text{ est une } dvv \,\} \vdash F$.

6. Conclure.