TD 1: Systèmes de Hilbert

{lionel.rieg,paolo.tranquilli}@ens-lyon.fr

Exercice 1. *Le théorème de déduction*

On se place dans un système logique qui prouve des séquents de la forme $\Gamma \vdash F$ avec des formules propositionnelles où Γ peut être infini. On se donne les seules règles suivantes :

$$\frac{P \in \Gamma}{\Gamma \vdash P}\text{AX} \qquad \frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma \vdash P \to Q}{\Gamma \vdash Q}\text{MP}$$

Soit H_0 (comme Hilbert) l'ensemble des formules de la forme $P \to Q \to P$ et $(P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R$. Vous voyez que $H_0 \vdash P$ dénote exactement les théorèmes du système de Hilbert pour la logique minimale que vous avez vu en cours.

1. Prouvez que $H_0 \vdash P \to P$ et $H_0 \vdash Q \to P \to P$.

2. Prouvez le méta-théorème suivant.

Théorème (Déduction)**.** *Si $H_0 \subseteq \Gamma$, alors $\Gamma \vdash P \to Q$ ssi $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$.*

Exercice 2. *Preuves, contre-exemples et pièges*

Prouver avec H_0 les formules suivantes ou en donner un contre-modèle.

a) $(P \to P \to Q) \to P \to Q$,

b) $(P \to Q) \to Q \to P$,

c) $(P \to R) \to Q \to R$,

d) $(P \to Q \to R) \to Q \to P \to R$,

e) $((P \to Q) \to P) \to P$,

f) $(P \to Q) \to (Q \to R) \to P \to R$.

Exercice 3. *Logique intuitionniste*

On étend la logique minimale en rajoutant les connecteurs usuels : $\wedge$, $\vee$ et $\bot$. On peut alors définir $\neg P$ par $P \to \bot$ et $P \leftrightarrow Q$ par $P \to Q \wedge Q \to P$.

1. Proposer des axiomes que doivent satisfaire ces connecteurs pour avoir le comportement attendu. On notera ce système par H_1, avec $H_0 \subseteq H_1$.

2. Dans ce cadre, donner une preuve ou un contre-modèle des propositions suivantes :

a) $P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$,

b) $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$,

c) $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,

d) $P \to \neg\neg P$,

e) $\neg P \vee Q \to (P \to Q)$,

f) $((P \to Q) \wedge (\neg P \to Q)) \to Q$,

g) $(\neg P \to P) \to \neg P$,

h) $\neg((P \to Q) \wedge (P \to \neg Q))$,

i) $P \vee \neg P$,

j) $((P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)) \to \neg P$.

3*. Soient H_2, H_2' et H_2'' les ensembles d'axiomes obtenus en étendant H_1 avec respectivement les formules de la forme $P \vee \neg P$ pour H_2, $\neg\neg P \to P$ pour H_2' et $((P \to Q) \to P) \to P$ pour H_2''. Montrer que ces systèmes sont équivalents.

Exercice 4. *Interprétation polynomiale et procédure de décision*

L'interprétation usuelle $(\!|\,.\,|\!)$ des formules à n variables libres les transforme en fonctions booléennes à n arguments.

1. Montrer que cette interprétation est surjective, c.-à-d. que toute fonction booléenne à n arguments peut se représenter par une formule à n variables libres.

On définit une interprétation polynomiale $[\![\,.\,]\!]$ des formules à n variables dans le quotient $\mathcal{F} = \mathbb{F}_2[X_1, \dots, X_n]/(X_i^2 = X_i)$ comme suit :

$$[\![X_i]\!] = X_i \qquad [\![F_1 \wedge F_2]\!] = [\![F_1]\!][\![F_2]\!] \qquad [\![\neg F]\!] = [\![F]\!] + 1$$

2. Donner l'interprétation de $F_1 \vee F_2$, $F_1 \to F_2$ et $\perp$.

3. Ces polynômes peuvent naturellement se voir comme des fonctions polynomiales de $\mathbb{F}_2^n$ dans $\mathbb{F}_2$, c.-à-d. des fonctions booléennes à n arguments. Montrer alors que l'interprétation directe $(\!|F|\!)$ d'une formule F est égale à la fonction polynomiale associée à $[\![F]\!]$.

4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ des fonctions booléennes à n arguments et $\mathcal{F}$ sont en bijection. (suggestion : la surjectivité peut être déduite des points précédents, et il n'y a pas besoin de montrer l'injectivité directement...)

5. En déduire des algorithmes pour :
- caractériser les tautologies ;
- caractériser les antilogies ;
- déterminer de quelles variables libres dépend vraiment une formule.

Exercice 5. *Modèle trivalué $\mathcal{L}_3$*

On se propose d'étendre l'espace de vérité $\{V, F\}$ par une valeur I (pour indéterminé).

1. Donner les tables de vérité des connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$ et $\perp$.

2. Montrer que cette interprétation trivaluée engendre des modèles de la logique intuitionniste.