TD 9: Loi de Little et réseaux de Pétri

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Exercice 1 (Loi de Little)

On se propose de démontrer ici la loi de Little : $\mathbb{E}(N) = \lambda\,\mathbb{E}(W)$. Pour cela, on va tout d'abord se placer dans un cadre déterministe et étudier une trajectoire. On se donne un système muni de processus d'arrivée et de départ, dont on note respectivement $A(t)$ et $D(t)$ les processus cumulés. Le nombre de clients dans le système à l'instant t est donc $C(t) = A(t) - D(t)$.

1. Exprimer l'aire entre les courbes de $A(t)$ et de $D(t)$ de deux façons différentes.
2. Définir
   - le taux moyen d'arrivée $\lambda(t)$ dans le système jusqu'à l'instant t,
   - l'attente moyenne $W(t)$ des clients jusqu'à l'instant t,
   - le nombre moyen $N(t)$ de clients dans le système jusqu'à l'instant t.
3. En divisant l'égalité de la première question par t et en faisant tendre t vers $+\infty$, donner la loi de Little expérimentale.
4. On conclut alors en utilisant le théorème ergodique. Sous quelles hypothèses la loi de Little s'applique-t-elle ?

Réseaux de Pétri

Définition (Réseau de Pétri)

Un *réseau de Pétri* est la donnée d'un graphe orienté biparti $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, E)$ et d'une fonction $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$.

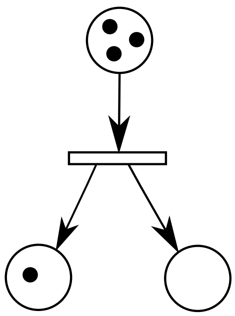
Les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés les *places* et ceux de $\mathcal{T}$ les *transitions*. On note ${}^\bullet t$ et $t^\bullet$ respectivement les voisinages négatifs et positifs d'une transition. On définit de manière analogue ${}^\bullet p$ et $p^\bullet$. Lorsque chaque place a au plus une transition antécédent et une transition successeur, le réseau est un *graphe d'événements* et on peut noter ${}^\bullet p$ et $p^\bullet$ les uniques transitions précédant et suivant la place p si elles existent. La quantité $\mu(p)$ est appelé *marquage* (initial) de p. Elle dénote le nombre de *jetons* présents dans la place p. On représente graphiquement les places par des cercles contenant des jetons et les transitions par des rectangles.

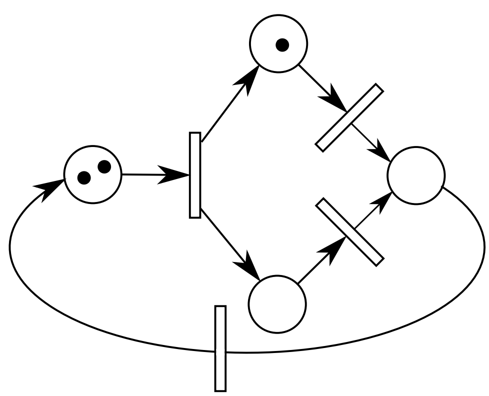
Définition (Évolution d'un réseau de Petri)

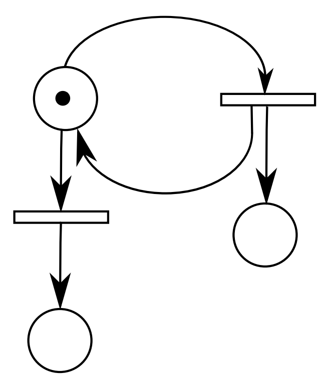
Un réseau de Pétri *évolue* par déplacement des jetons entre les places selon les transitions. Plus précisément, une transition t est *franchissable* si $\forall p \in {}^\bullet t, \mu(p) \geqslant 1$ et on effectue une telle transition (on dit qu'on *tire* la transition) en retirant un jeton de toutes les places de ${}^\bullet t$ et ajoutant un jeton dans toutes les places de $t^\bullet$.

Exercice 2

Donner l'évolution des réseaux de Petri suivants. Quelles sont leurs différences ?







Exercice 3

Construire des réseaux de Petri qui effectuent les opérations suivantes. Dans la mesure du possible, essayer de se restreindre aux graphes d'événements.

1. choix non déterministe
2. addition du nombre de jetons situés dans deux places
3. soustraction d'une constante
4. multiplication par une constante
5. division par une constante
6. un compteur binaire
7. le schéma d'attente d'une file M/M/1

Exercice 4 (Accessibilité)

Un marquage est dit *accessible* s'il existe une évolution du réseau de Petri vers ce marquage.

1. Dans le cas général, le problème de l'accessibilité est EXPSPACE-difficile. Donner un semi-algorithme pour le résoudre.
2. Montrer que si l'on retire la contrainte de positivité du marquage, alors on peut résoudre le problème de l'accessibilité en temps polynomial avec des outils d'algèbre linéaire. En déduire une méthode de preuve d'inaccessibilité.

Exercice 5 (Réseaux de Petri bornés)

Un réseau de Petri est dit M-borné si le nombre de jetons dans chaque place ne peut dépasser M.

1. Comment caractériser les réseaux M-bornés en terme de marquages accessibles ?
2. En déduire un algorithme pour déterminer si un réseau de Petri est M-borné. Quel est sa complexité ?
3. Illustrer l'algorithme sur les exemples de l'exercice 2.
4. Déterminer une transformation entre réseaux de Petri qui force une place d'un réseau général à être M-bornée. Montrer la correction de la transformation.

Exercice 6 (Simulation des machines de Turing à mémoire bornée)

Vu les règles d'évolution des réseaux de Pétri, on se convainc sans peine qu'ils sont simulables par une machine de Turing. On va ici montrer une forme de réciproque : les réseaux de Petri peuvent simuler les machines de Turing à espace borné. La taille d'une machine de Turing va être la taille de son encodage plus la taille de l'espace mémoire qu'elle utilise. La simulation va produire un réseau de Petri 1-borné mais qui ne sera pas un graphe d'événement.

1. En utilisant un codage «1-hot» (donc presque unaire) des configurations de la machine de Turing, définir l'ensemble des places du réseau de simulation.
2. Donner à présent les transitions du réseau de Petri.
3. Préciser enfin son marquage initial.
4. Montrer que la taille du réseau de Petri obtenu est quadratique en la taille de la machine de Turing simulée.
5. En utilisant le fait que le problème de l'acceptation d'un mot par une machine de Turing à mémoire bornée est PSPACE-complet, comment en déduire la PSPACE-difficulté des problèmes suivants ?
   - accessibilité
   - existence d'une exécution infinie
   - évitement d'une place (aucun jeton n'y est jamais ajouté)
   - ...