

TD 8: Chaînes de Markov en temps continu

lionel.rieg@ens-lyon.fr

Exercice 1 (La chaîne M/M/1)

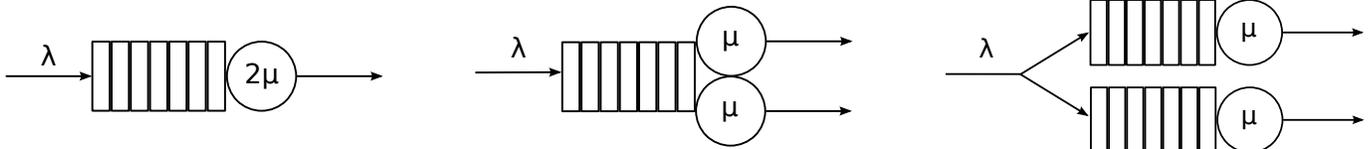
On étudie une file d'attente avec un serveur et une capacité infinie. Les temps d'inter-arrivées et de service sont choisis exponentiels de paramètres respectifs λ et μ . On pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ le taux d'utilisation du serveur. Le nombre de clients dans la file, noté $N(t)$, est une chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans \mathbb{N} .

1. Décrire le schéma de Matthes de cette file.
2. Donner la condition de stabilité de la file et la démontrer à l'aide des théorèmes de Foster.
3. Déterminer le générateur infinitésimal de la chaîne.
4. Calculer l'unique distribution stationnaire de cette chaîne.
5. Donner le nombre moyen de clients dans la file en régime stationnaire.

On peut également calculer le *temps moyen de service* (temps qui sépare une arrivée dans la file et sa sortie) : il vaut $\bar{W} = \frac{1}{\mu - \lambda}$.

Exercice 2 (Comparaison de trois modèles de serveur)

On souhaite comparer les trois architectures suivantes de file d'attente :



1. Intuitivement, quelle configuration semble la meilleure ?
2. Montrez que le processus d'arrivée dans chaque file de la dernière configuration suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$.

Pour chacune des trois configurations :

3. Donnez sa condition de stabilité.
4. Écrire son générateur infinitésimal (en précisant les cas limites).
5. Calculer le nombre moyen de clients dans le système.
6. En déduire le temps moyen de réponse.

Où se trouve la différence entre les différentes configurations ? Laquelle préférer ?

Exercice 3 (Serveur et miroir)

On dispose de deux serveurs Web : un serveur principal et un serveur miroir. Les requêtes arrivent à un routeur qui doit essayer de répartir le travail entre le serveur principal ou son miroir, qui est supposé moins performant. Le routeur ne connaissant pas la charge respective des deux serveurs, il décide d'envoyer chaque requête au serveur principal avec probabilité p ou au serveur miroir avec probabilité $1 - p$. On cherche à optimiser le choix de p .

On suppose que les arrivées suivent une loi de Poisson de paramètre λ . Les temps de service des serveurs sont exponentiels de paramètres respectifs μ pour le serveur principal et ν pour le miroir.

1. Quelles sont les conditions de stabilité du système ?
2. Calculer le nombre de requêtes en attente dans le serveur principal et dans le miroir à l'état stationnaire.
3. Donnez le temps de réponse moyen dans le système global.
4. Déterminez la valeur optimale de p .