TD 7 : Théorèmes de Foster

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Théorèmes de Foster

Théorème (Premier théorème de Foster)

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène irréductible de terme général p_{ij} sur un ensemble E dénombrable. S'il existe une fonction $h : E \to \mathbb{R}^+$, un ensemble fini F et une constante $\varepsilon > 0$ tels que

$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) < \infty \text{ pour tout } i \in F$$
$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) \leqslant h(i) - \varepsilon \text{ pour tout } i \notin F,$$

alors (X_n) est récurrente positive.

Théorème (Second théorème de Foster)

Soit X_n une chaîne de Markov homogène irréductible de terme général p_{ij} sur un ensemble E dénombrable. S'il existe une fonction $h : E \to \mathbb{R}^+$, un ensemble fini F et une constante M tels que

$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) \leqslant h(i) + M \text{ pour tout } i \in E$$
$$h(j_0) > \max_{i \in F} h(i) \text{ pour un certain } j_0 \notin F$$
$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) \geqslant h(i) \text{ pour tout } i \notin F$$

alors (X_n) n'est pas récurrente positive.

Exercice 1 (Reformulation des théorèmes)

Montrer que

$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) - h(i) = \mathbb{E}(h(X_{n+1}) - h(X_n) \,|\, X_n = i)$$

et reformuler les théorèmes de Foster en utilisant $\mathbb{E}(h(X_{n+1}) - h(X_n) \,|\, X_n = i)$.

Exercice 2 (Marches aléatoires)

1. Montrer qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ uniforme (les nœuds sont tous identiques sauf peut-être au voisinage de 0) mais dont la probabilité d'aller à droite est plus grande que celle d'aller à gauche n'est pas récurrente positive.
2. Qu'en est-il si la chaîne « penche vers la gauche » (sauf en 0) ?
3. Est-il vrai qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ « qui rapproche de l'origine » est récurrente positive ? En toute dimension ?

Exercice 3 (Contre-exemples)

Donner des contre-exemples aux théorèmes de Foster lorsque les hypothèses ne sont pas satisfaites, notamment quand la fonction de potentiel h prend des valeurs négatives ou quand le sous-ensemble F est infini.

2 Stabilisation d'Aloha

Aloha est un protocole de communication sur un canal partagé entre plusieurs stations qui n'ont pas conscience les unes des autres. Les transmissions et retransmissions ne peuvent débuter qu'à des moments du type $k\delta$ avec k entier et $\delta > 0$ la largeur d'une *case*. Lorsque deux stations essayent de transmettre simultanément des messages, ils se brouillent mutuellement et aucun n'est correctement transmis. Ces *conflits* sont détectés par les stations. Le protocole est le suivant :

- les messages frais essayent systématiquement de passer à l'instant qui suit leur arrivée
- en cas de conflit, chaque station participant au conflit essaie indépendamment de retransmettre son message au début de la case suivante avec probabilité $0 < \nu < 1$.

On note A_n le nombre de messages frais arrivés au début de la case n et X_n le nombre de message retardés à l'instant n.

Exercice 4 (Instabilité d'Aloha)

1. Quelle hypothèse est-il raisonnable de faire ?

On pose

$$a_i = \mathbb{P}(A_n = i) \qquad \lambda = \mathbb{E}(A_n) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, a_i$$

2. Donnez la probabilité $b_i(k)$ que i stations essayent de retransmettre s'il y a k stations en conflit.
3. Donnez la probabilité p_{kl} de passer de k à l messages retardés.
4. Montrer, à l'aide du second théorème de Foster, que ce protocole est instable, *i.e.* que la suite X_n n'est pas récurrente positive.
5. Comment cela se traduit-il concrètement pour le protocole ?

Exercice 5 (Stabilisation d'Aloha)

Plutôt que d'utiliser une politique de retransmission à ν fixe, on va essayer d'atteindre la stabilité en utilisant un $\nu(k)$ variable en fonction du nombre de messages retardés. On va montrer que la condition

$$\lambda < \liminf_{k\to+\infty} (b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1)$$

est suffisante pour la stabilité. Elle équivaut à l'existence de $\varepsilon > 0$ et d'un ensemble fini $F \subset \mathbb{N}$ tels que

$$\lambda < b_1(k)a_0 + b_0(k)a_1 - \varepsilon \quad \text{pour tout } i \notin F$$

1. Sous cette hypothèse, utiliser le premier théorème de Foster pour conclure.
2. Étudiez les extrémas de la fonction $g_k(\nu) = (1-\nu)^k a_1 + k\nu(1-\nu)^{k-1} a_0$.
3. En remarquant que $\left(\frac{k-1}{k-a_1/a_0}\right)^{k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{a_1}{a_0}-1}$, donner une condition suffisante de stabilité.
4. Comment s'illustre cette condition lorsque les A_n suivent une distribution poissonnienne ?
5. Quel est le défaut de cette politique de retransmission ?