TD 5: Modélisation et chaînes de Markov discrètes

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Schéma (plus simple) de Matthes et modélisation

Exercice 1

On rappelle qu'un schéma de Matthes est la donnée de :
- un ensemble $\mathcal{E}$ d'*états* ι ;
- un ensemble $\mathcal{S}$ de *sources* α ;
- une fonction d'activation $A : \mathcal{E} \to \mathcal{P}(\mathcal{S})$;
- des vitesses $c(\alpha, \iota)$;
- des probabilités de transition $p(\alpha, \iota, \iota')$;
- des distributions de probabilités données (en général) par leurs fonctions de répartition F_α.

1. Donner la signification des différents éléments d'un schéma de Matthes.

Une file d'attente est composée de deux aspects distincts : *le processus des entrées* et *le mécanisme de service*.
Le processus des entrées est défini par une suite de couples aléatoires (T_n, Z_n) où T_n est le temps d'arrivée du n^e client (on a donc $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots$) et Z_n représente les attributs du client n. Les attributs des clients peuvent avoir des formes très variées, parmi lesquelles on trouve la *charge apportée* qui dénote la quantité de service dont à besoin le client et la *charge apportée typée* qui comporte en outre le type de service nécessaire.

Le mécanisme de service est défini par le nombre de serveurs, leurs vitesses, la capacité de la salle d'attente et la *discipline de service* qui explique comment sont traités les clients (notamment la priorité et la préemption). Voici quelques exemples de discipline :

PAPS premier arrivé, premier servi ;

DAPS dernier arrivé, premier servi ;

ALÉA le client est choisi uniformément dans la salle d'attente ;

PP (processeur partagé) tous les clients sont servis en parallèle à la même vitesse.

On se limite au cas où :
- Z_n représente la charge apportée (à valeurs dans $\mathbb{R}^+$) et est i.i.d. ;
- T_n et Z_n sont indépendants ;
- T_n est un *processus de renouvellement*, *i.e.* $s_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ est une suite de v.a.i.i.d. ;
- il n'y a qu'un serveur qui travaille à vitesse 1
- la discipline de service est l'une des trois premières présentées ci-dessus.

2. Donner le schéma de Matthes de la file d'attente décrite ci-dessus.
3. Que se passe-t-il si on ajoute des serveurs ?
4. Si on voulait ajouter des types aux clients, comment faudrait-il modifier le schéma ?

Exercice 2

On considère un système composé de n stations qui émettent des messages. Le temps est discret et un entier $W > 0$ est fixé.

Si à un instant une station i à un message à émettre, elle tire indépendamment un entier aléatoire W_i dans $\{0, 1, \dots, W-1\}$. A chaque nouvel instant, elle décrémente de 1 son entier W_i. A l'instant où W_i vaut 0, elle émet son message.

Si une seule station émet à un instant donné, son message est bien transmis. Si elle a un autre message à émettre, elle tire à l'instant suivant un nouvel entier aléatoire et recommence la procédure.

Si deux stations ou plus émettent en même temps, les messages se brouillent, on parle de *collision*. L'émission de tous ces messages échoue. Chaque station concernée conserve son message et tire à l'instant suivant et indépendamment un nouvel entier aléatoire. La procédure continue ainsi de suite.

1. Que se passe-t-il dans le système si on choisit $W = 1$?
2. On suppose que à l'instant $t = 0$, chaque station a un nombre fixé, fini ou infini, de messages qu'elle doit transmettre les uns après les autres. Montrer que l'on peut décrire la dynamique du système sous forme d'une chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble d'états bien choisi. Illustrer en dessinant le graphe de transition dans le cas $n = 2$, $W = 2$ et 1 message à transmettre par station, ainsi que dans le cas $n = 2$, $W = 3$ et une infinité de messages par station.

2 Chaînes de Markov

Exercice 3 (Chapman-Kolmogorov)

On se donne une suite (X_n) de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X_0 = -1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$. On définit la suite (Y_n) par : $Y_{2n} = X_n$ et $Y_{2n+1} = X_n X_{n+1}$. On admet que la suite (Y_n) est i.i.d.

1. Vérifier que la suite (Y_n) satisfait les équations de Chapman-Kolmogorov.
2. Montrer que ce n'est pourtant pas une chaîne de Markov.
3. On considère la suite (Y_n, Y_{n+1}). Montrez qu'il s'agit d'une chaîne de Markov (non homogène).

Exercice 4 (Distribution limite)

Calculer, si elles existent, les distributions limites des chaînes suivantes (étudiées au TD précédents) en utilisant des relations de récurrences :

1. Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.
   - Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
   - Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
   - Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
   - Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
   - Courir est fatigant ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.
2. Ruine du joueur : un joueur commence avec un pactole de s €. Il lance une pièce : si elle tombe sur pile il gagne 1 €, sinon il perd 1 €. Il joue jusqu'à atteindre une fortune de M € ou être ruiné.
3. Marche aléatoire isotrope sur $\mathbb{Z}$
4. Diffusion de Ehrenfest : N particules sont enfermées dans deux boîtes reliées par un tube. À chaque instant (discret), une particule est choisie de façon uniforme et passe d'une boîte à l'autre. On s'intéresse au nombre de particules dans chaque boîte.

Exercice 5 (Temps d'arrêt)

On rappelle qu'une variable aléatoire T est un temps d'arrêt pour une suite de v.a. (X_n) lorsque l'événement $\{T = m\}$ ne dépend que de $X_1, \ldots, X_m$. On fixe (X_n) et on se donne T_1 et T_2 deux temps d'arrêts pour X. Indiquer si les v.a. suivantes sont des temps d'arrêt :

1. une variable aléatoire constante
2. le premier retour en un point
3. le dernier retour en un point
4. $T_1 + k$, où $k \in \mathbb{N}$
5. $T_1 - k$, où $k \in \mathbb{N}$
6. $\max(T_1, T_2)$ et $\min(T_1, T_2)$
7. $T_1 + T_2$ et $T_1 - T_2$
8. $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid X_1 + \cdots + X_n \leqslant t\}$ (on suppose les X_n positifs)
9. $N(t) + 1$