TD 4: Schémas de Matthes et chaînes de Markov

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Schéma de Matthes

Exercice 1 (Commutation de paquets)

Un réseau à commutation de paquets (comme internet) transporte des paquets contenant de l'information. Il est formé de canaux de communication et de routeurs chargés d'aiguiller les paquets sur le bon canal. Un canal donné est utilisé par plusieurs routes et le débit de transmission nécessaire à un instant à travers celui-ci peut potentiellement excéder sa capacité. Les routeurs sont donc équipés de mémoires pour mettre en attente les paquets excédentaires.

On va supposer pour simplifier que le calcul des routes est instantané et que les routeurs ont une mémoire illimitée, si bien que les ressources critiques sont les canaux, qu'on va supposer de capacité égale à un. Chaque routeur est relié à un réseau local qui émet et reçoit des paquets. L'apparition d'un nouveau paquet dans un canal c est gouvernée par un processus de Poisson de paramètre λ_c. Le routage est représenté par une matrice de transition qui donne la probabilité p_{ij} qu'un paquet sortant du canal i entre dans le canal j. Les paquets sont transmis de manière séquentielle et la durée de transmission d'un paquet suit une loi exponentielle de paramètre μ_c (qui dépend du canal c en fonction de sa fiabilité).

Donner le schéma de Matthes correspondant à cette situation. Écrire la procédure de simulation de ce schéma en pseudo-code.

2 Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov sont définies par la propriété éponyme suivante :

$$\forall n, \forall x_1, \dots, x_n,\ \mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_0 = x_0,\, X_1 = x_1, \dots\, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1})$$

Lorsque cette probabilité conditionnelle ne dépend pas de n, la chaîne est dite *homogène*. Cela correspond à son indépendance vis-à-vis du temps. On peut alors représenter les transitions de la chaîne par une multiplication matricielle.

Exercice 2

On lance un dé à six faces. Est-ce que les variables aléatoires suivantes sont des chaînes de Markov ?

1. La plus grande valeur observée jusqu'au n^{e} lancer.
2. Le nombre de six obtenus jusqu'au n^{e} lancer.
3. Le nombre de lancers depuis le dernier six.
4. Le nombre de lancers jusqu'au prochain six.

Peut-on dégager un schéma général ?

Exercice 3

Donner les matrices de transition et les graphes associés pour les problèmes suivants :

1. Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.
   – Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
   – Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
   – Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.

 – Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
 – Courir est fatigant ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.

2. Ruine du joueur : un joueur commence avec un pactole de s €. Il lance une pièce : si elle tombe sur pile il gagne 1 €, sinon il perd 1 €. Il joue jusqu'à atteindre une fortune de M € ou être ruiné.
3. Marche aléatoire isotrope sur $\mathbb{Z}$
4. Diffusion de Ehrenfest : N particules sont enfermées dans deux boîtes reliées par un tube. À chaque instant (discret), une particule est choisie de façon uniforme et passe d'une boîte à l'autre. On s'intéresse au nombre de particules dans chaque boîte.

Exercice 4 (Analyse d'une multinationale)

Une multinationale doit traiter un dossier très sensible. Il est certain que lorsqu'il sera découvert, le cadre qui en est actuellement en charge se fasse remercier pour incompétence, ceci afin de préserver l'image de l'entreprise. Chaque personne cherche donc à se débarrasser du dossier, ce qu'elle peut faire de deux façons :

 – ou bien le donner à un autre cadre de son service choisi uniformément (toutes les personnes d'un même service se connaissent),
 – ou bien le faire sous-traiter par un autre service dont elle est responsable (le dossier est alors donné à un cadre de ce service, choisi uniformément).

On suppose que la propension de chaque cadre à choisir (s'il en a la possibilité !) l'une de ces deux options est constante. On s'intéresse à la probabilité se faire remercier, c'est-à-dire la probabilité d'avoir le dossier sensible. Comme sa découverte par la presse va prendre du temps, on ne considère que le comportement asymptotique des mouvements du dossier. Voici la liste des cadres de la multinationale :

personne	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
membre des services	1	1	1	2	2	2,3	3	4	4	5	5	5
responsable des services	1	2 3	3	4			5					
propension à sous-traiter	0,4	0,5 0,5	0,7	0,4	0	0	0,9	0	0	0	0	0

1. Donner le graphe de transition des mouvements du dossier.
2. Y a-t-il des personnes à l'abri ? Si oui, pourquoi ? Comment les caractériser ?
3. Peut-on simplifier la chaîne de Markov ? Si oui, pourquoi ?
4. Donner une présentation matricielle du problème et y répondre (on admet la convergence de la chaîne de Markov).
5. On suppose que chaque service possède une secrétaire. Lors d'un transfert de dossier, le cadre qui gère le dossier choisit à quel service le renvoyer (le sien ou l'un des ceux dont il est responsable) et c'est la secrétaire du service concerné qui fait l'attribution (uniforme) au sein du service. Comment est modifiée la chaîne de Markov ? Quelle nouvelle propriété a-t-elle ? Peut-on adapter l'analyse précédente ?

3 Solutions

▶ **Exercice 1**
L'ensemble $\mathcal{E}$ des états est le nombre de paquets en attente ou en cours de transmission dans chaque canal. On ignore donc l'existence des routeurs. C'est donc un vecteur ι de $\mathbb{N}^N$ avec N le nombre de canaux. L'ensemble $\mathcal{S}$ des sources est divisées en sources « positives » $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ qui font apparaître (depuis un réseau local) des paquets dans le réseau et sources négatives $\beta_1, \dots, \beta_N$ qui font disparaître du buffer les paquets qui ont traversés le canal p (elles représentent les transitions). L'ensemble $A(\iota)$ des sources actives est $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \cup \left\{\beta_p \;\middle|\; \iota_p > 0\right\}$: des paquets apparaissent en permanence et seul les canaux non vide effectuent des transferts. Les vitesses sont toutes égales à 1 par hypothèse. les termes non nuls des distributions de transition sont

$$p(\alpha_p, \iota, \iota + e_p) = 1$$
$$p(\beta_p, \iota + e_p, \iota + e_q) = p_{pq}$$
$$p(\beta_p, \iota + e_p, \iota) = 1 - \sum_{q=1}^{N} p_{pq}$$

Les fonctions de répartition qui définissent les distributions des sources sont :

$$F_{\alpha_p}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_p x}$$
$$F_{\beta_p}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu_p x}$$

▶ **Exercice 2**
Le schéma général est donné par le théorème suivant :

> Si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v. a. i. i. d. à valeur dans F, si $f : E \times F \to E$ est une fonction et si X_0 est une v. a. indépendante des Z_n, alors la suite de v. a. $X_{n+1} = f(X_n, Z_n)$ définit une chaîne de Markov homogène.

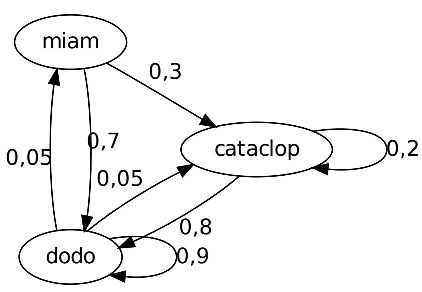
Ici, les Z_n sont les lancers successifs du dé, X_0 vaut 0 (sauf dans le dernier cas) et f varie en fonction de ce qu'on compte. Ainsi, les trois premiers exemples proposés sont des chaînes de Markov. Quant au dernier, il ne faut pas se laisser impressionner par la dépendance vers le futur : le temps d'attente ne dépend pas de historique de ces temps. On peut même en détailler la loi : si X_n est non nul, $X_{n+1} = X_n - 1$ et si $X_n = 0$, le temps d'attente suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

Cependant, il est possible de fabriquer à partir de suites i. i. d. des suites qui ne soient pas des chaînes de Markov. Par exemple, Si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v. a. i. i. d. telles que $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = \frac{1}{2}$, on définit X_n par :

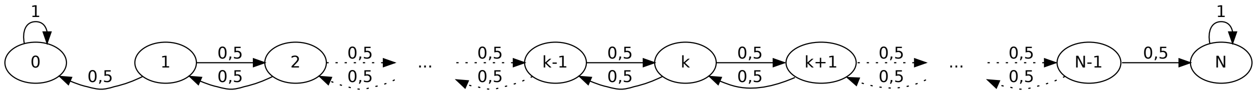
$$X_{2n+1} = Z_n \qquad X_{2n} = Z_{n-1} Z_n$$

On a alors $\mathbb{P}(X_{2n+1} = 1 \,|\, X_{2n} = -1) = \frac{1}{2}$ mais $\mathbb{P}(X_{2n+1} = 1 \,|\, X_{2n} = -1 \wedge X_{2n-1} = 1) = 0$.

▶ **Exercice 3**

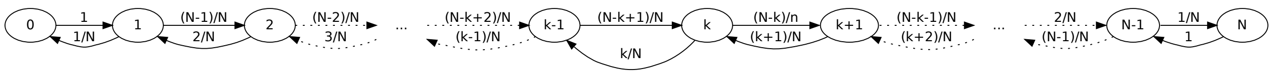
1. 

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$



2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & & & & \\ & 0 & \ddots & & & \\ & 0,5 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0,5 & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

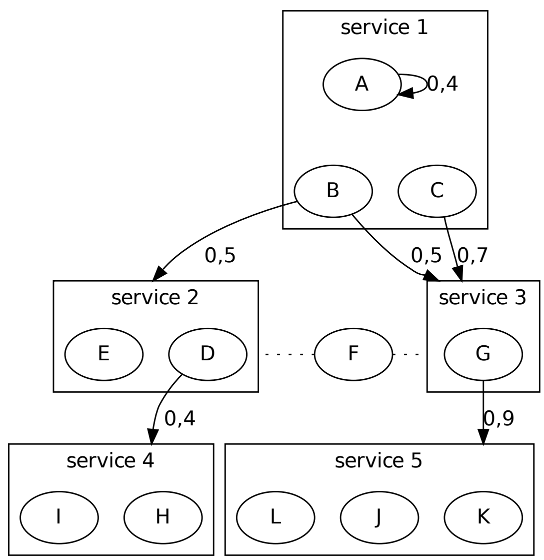
3. C'est la limite du cas précédent lorsque les bornes tendent vers l'infini. On ne peut plus alors parler de matrice (elle serait infinie) mais d'opérateur de transition.



4.

▸ Exercice 4

1. Malgré le dessin, le noeud F fait partie des services 2 et 3.



2. Les personnes à l'abri sont celles pour lesquelles la probabilité d'une infinité de retour est égale à 0 (*i.e.* la probabilité d'un retour n'est pas égale à 1). Cela correspond aux services 1, 2, et 3. Ces états sont appelés *transcients* par opposition aux états *récurrents*. Lorsque tous les états sont récurrents, la chaînes est dite *irréductible*.
3. L'absence de retour possible dans le graphe est lié à la décomposition en composantes fortement connexes (appelées *classes de communication* dans la théorie des chaîne de Markov). Les personnes sur la sellette sont précisément celles qui appartiennent à une composante fortement connexe finale. On peut donc commencer une étude à haut niveau sur le graphe des composantes fortement connexes (dans lequel on contracte les noeuds d'une même classe de communication) pour déterminer quelle est la probabilité d'arriver dans les différentes classes finales. On fera ensuite une étude plus fine au sein de chaque classe.

4. La distribution limite π_∞ (qu'on suppose exister) est stable par multiplication avec la matrice de transition M car $\pi_\infty = M^\infty \pi_0 = MM^\infty \pi_0 = M\pi_\infty$. On recherche donc un vecteur propre de M *i.e.* un vecteur du noyau de $M - I$.
5. On remarque les secrétaires ont le dossier en main une étape sur deux vu que chaque mouvement passe par elles. Ainsi, on ne peut avoir convergence vers une mesure stationnaire. De plus, tout chemin de retour a une longueur paire. On dit que la chaîne est *périodique* de période 2. Afin de se ramener à une chaîne qui possède une distribution stationnaire, on étudie les chaînes D_{2n} et D_{2n+1}. On retrouve alors des chaînes pour lesquelles le pgcd des longueurs de chemins de retour est 1, qu'on appelle chaîne *apériodique*. En revanche, comme on a modifié la chaîne, on a peut-être perdu la propriété d'irréductibilité pour la matrice M^2, ce qui nous contraint à reprendre la même analyse. Ultimement, on obtient une chaîne irréductible et apériodique pour laquelle un théorème nous donne l'existence d'une mesure stationnaire.