TD 2 – Lois classiques

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Rappels de cours et propriétés

Exercice 1

1. A-t-on toujours $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ pour X et Y variables aléatoires réelles ?
2. Idem pour $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.
3. Préciser sous quelle condition la première égalité est vraie (et le démontrer !).

Exercice 2

On rappelle la définition de la variance pour une variable aléatoire X : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.

1. Montrez qu'elle est égale à $\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.
2. Montrez que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
3. Donner un contre-exemple lorsque la condition précédente n'est pas satisfaite.

Exercice 3

On rappelle que la fonction génératrice des moments pour une variable aléatoire réelle X est définie par $M_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$.

1. Montrez que $M_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X^k\right) \frac{t^k}{k!}$.
2. Montrez que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

2 Lois classiques

2.1 Lois discrètes

Exercice 4

On lance une pièce biaisée qui a une probabilité p de tomber sur pile. La *loi de Bernoulli* (de paramètre p) $\mathcal{B}(p)$ est la loi du nombre de pile obtenu sur un lancer.

1. Détailler cette loi.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer sa fonction génératrice des moments.

Exercice 5

On reprend la pièce de l'exercice précédent mais on la lance n fois. On compte toujours le nombre de pile.

1. Donner la loi de cette variable aléatoire X_n, appelée *loi binomiale* de paramètres n et p et notée $\mathcal{B}(n, p)$.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer sa fonction génératrice des moments.

Exercice 6

On passe à présent à un très grand nombre de lancers de pièces. On va donc s'intéresser au comportement asymptotique lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Si p reste constant X_n va tendre vers $+\infty$. On va donc supposer que p tend vers 0 et plus précisément que np reste constant.

1. Montrer que dans ce cas, la loi binomiale tend vers la *loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ (définie sur $\mathbb{N}$) donnée par $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \lambda > 0$.
2. Vérifier que la loi de Poisson est bien une loi de probabilité.
3. Calculer l'espérance et la variance de cette loi.
4. Calculer sa fonction génératrice des moments.
5. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 7

Plutôt que de compter le nombre de piles pour n lancers, on décide à présent de considérer le nombre de lancers nécessaires pour voir apparaître la première occurrence de pile.

1. Donner la loi de cette variable aléatoire Y qu'on appelle *loi géométrique* de paramètre p.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Montrez que la loi géométrique est sans mémoire : pour tous n et k dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n + k \mid Y > k) = \mathbb{P}(Y = n)$.

2.2 Lois continues

Exercice 8

On considère la *loi exponentielle* de paramètre λ, définie par la densité $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Montrez que la loi exponentielle est *sans mémoire*, *i.e.* $\mathbb{P}(X \geqslant a + b \mid X \geqslant b) = \mathbb{P}(X \geqslant a)$ pour tout a et b dans $\mathbb{R}^+$.
4. Montrez réciproquement que toute loi sans mémoire est exponentielle.

Exercice 9

La *loi normale* de paramètre m et σ^2 (notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$) et définie sur $\mathbb{R}$ a pour densité $f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Si X et Y suivent des lois normales de paramètres respectifs (m_1, σ_1^2) et (m_2, σ_2^2), montrez que $X + Y$ suit une loi normale de paramètre $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
4. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, calculer la probabilité que X soit compris entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$.

3 Solutions

▸ **Exercice 1** 1. Cela est faux en général, par exemple prendre $Y = X$ qui suit une loi de Bernoulli. On a alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) = p \neq p^2 = \mathbb{E}(X)^2$.

2. Si on prend $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.
3. Une condition suffisante pour avoir l'égalité est l'indépendance de X et Y :

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f_{X\times Y}(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f_X(x) f_Y(y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} y f(y) \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} y f(y)\mathbb{E}(X) \,\mathrm{d}y = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

On utilise dans cette preuve $f_{X\times Y}$ la loi jointe de X et Y et le fait que $g(x, y) = xy$ soit mesurable (sur la tribu produit) qui nous donne que $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x, y) f X \times Y(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

▸ **Exercice 2** 1.

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mathbb{E}(X)\,X + \mathbb{E}(X)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

2. Comme X et Y sont indépendants, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}\left((X + Y)^2\right) - \mathbb{E}(X + Y)^2 = \mathbb{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2\\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - (\mathbb{E}(X)^2 + 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2)\\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)\end{aligned}$$

3. Comme contre-exemple, on peut prendre $Y = -X$. Dans ce cas, $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(0) = 0$ qui n'est en général pas égal à $\mathrm{Var}(X)$.

▸ **Exercice 3** 1.

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{(tX)^k}{k!}\right) = \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}\left(X^k\right) \frac{t^k}{k!} \tag{1}$$

Il faut justifier l'inversion entre somme et espérance (intégrale). Cela se fait de manière classique par le duo des théorèmes de Fubini-Tonelli et de Fubini. On rappelle qu'il faut pour cela vérifier la σ-finitude des mesures, *i.e.* l'existence d'une famille dénombrable couvrant l'espace total et dont tous les termes sont de mesure finie. C'est automatiquement vérifié pour une mesure de probabilité (elle est finie) et vrai pour la mesure de comptage (qui correspond à la somme) en prenant les segments $[\![-n, n]\!]$.

2.

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tY}\right) = M_X(t)M_Y(t) \tag{2}$$

Il faut justifier l'indépendance de e^{tX} et e^{tY} à partir de celle de X et Y. Deux façons pour cela : ou bien dire que si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X^k \perp\!\!\!\perp Y^m$ pour tout k et m dans $\mathbb{N}$ puis utiliser la linéarité de l'espérance, ou bien utiliser la caractérisation suivante de l'indépendance : $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall g\, h$ mesurables, $\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\,\mathbb{E}(h(Y))$ et prendre $g = h = x \mapsto \mathrm{e}^{tx}$.

▸ **Exercice 4** 1. La loi de Bernoulli est caractérisée par $\mathbb{P}(\mathcal{B}_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\mathcal{B}_n = 0) = 1 - p$.

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathcal{B}(p)) &= 1 \cdot \mathbb{P}\left(\mathcal{B}_p = 1\right) + 0 \cdot \mathbb{P}\left(\mathcal{B}_p = 0\right) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p\\ \mathrm{Var}(\mathcal{B}(p)) &= \mathbb{E}\left(\left(\mathcal{B}_p - \mathbb{E}\left(\mathcal{B}_p\right)\right)^2\right) = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) = (1 - p)^2 p + p^2(1 - p) = p(1 - p)(1 - p + p) = p(1 - p)\end{aligned}$$

3. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors

$$M_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}\left(X^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}(0^k \cdot (1 - p) + 1^k \cdot p) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}p \quad + 0^0 \cdot (1 - p) = 1 - p + p \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} = 1 - p + p\mathrm{e}^t$$

► **Exercice 5** 1. Pour avoir $X_n = k$, il faut avoir k succès parmi les n possibles. Cela nous donne $\binom{n}{k}$ possibilités, chacune arrivant avec probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ car les lancers sont indépendants. D'où

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(n,p) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. On peut utiliser la linéarité de l'espérance et le fait que $\mathcal{B}(n,p) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{B}(p)$ pour avoir directement que $\mathbb{E}(\mathcal{B}(n,p)) = np$. De même, comme chacun des lancers est indépendants on a également $\mathrm{Var}(\mathcal{B}(n,p)) = n\,\mathrm{Var}(\mathcal{B}(p)) = np(1-p)$.
Un calcul direct est cependant possible :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathcal{B}(n,p)) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(\mathcal{B}(n,p) = 1) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np(P+1-p)^n = np
\end{aligned}$$

Pour le calcul direct de la variance, il faut utiliser la linéarité de la dérivation et l'égalité suivante : $kx^k = x\left(x^k\right)'$.

3. Par indépendance des tirages, on a $M_{\mathcal{B}(n,p)}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{\mathcal{B}(p)}(t) = (1-p+pe^t)^n$

► **Exercice 6** 1. Posons $c = np$. On a $p = \frac{a}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{B}(n,p)) \quad &= \quad \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n^k}{k!} \underbrace{\left(\prod_{i=0}^{k} (1-\frac{i}{n})\right)}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1} p^k (1-p)^n \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1} \\
&\sim \quad \frac{c^k}{k!}(1-p)^n = \frac{c^k}{k!}\left(1-\frac{c}{n}\right)^n \to \frac{c^k}{k!} \mathrm{e}^{-c}
\end{aligned}$$

2. Il s'agit de vérifier que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda) = k) = 1$.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1$$

3.
$$\mathbb{E}(\mathcal{P}(\lambda)) = \sum_{k\geqslant 0} k \cdot \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda) = k) = \sum_{k\geqslant 0} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{k\geqslant 1} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda \sum_{k\geqslant 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda) = k) = \lambda$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathcal{P}(\lambda)) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\, \mathbb{P}(X = k) - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\, \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 \\
&= \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda \left(\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) - \lambda^2 = \lambda(\mathbb{E}(\mathcal{P}(\lambda)) + 1) - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

4.
$$M(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{tk}\, \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{tk} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}$$

5. On va utiliser la fonction génératrice des moments : $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}$.

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(e^t-1)}\mathrm{e}^{\mu(e^t-1)} = \mathrm{e}^{\lambda(e^t-1)+\mu(e^t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}$$

On reconnaît alors la fonction génératrice des moments d'une loi de Poison de paramètre $\lambda + \mu$.

► **Exercice 7** 1. Les $k-1$ premiers lancers tombent sur face et le k^{e} sur pile d'où, par indépendance des lancers,

$$\mathbb{P}(Y=k)=(1-p)^{k-1}p$$

2.
$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{+\infty}-((1-p)^k)'=p\left(-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right)'=p\left(-\frac{1}{p}\right)'=\frac{1}{p}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=\mathbb{E}\left(Y^2\right)-\mathbb{E}(Y)^2=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\cdot(1-p)^{k-1}p-\frac{1}{p^2}=p\left(-\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^k\right)'-\frac{1}{p^2}=p\left((1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}\left((1-p)^k\right)'\right)'-\frac{1}{p^2}\\&=p\left((1-p)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right)'\right)'-\frac{1}{p^2}=p\left((1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)'\right)'-\frac{1}{p^2}=p\left(\frac{-p(1-p)-(1-p)^2}{p^2}\right)'-\frac{1}{p^2}\\&=-p\left(\frac{(1-p)(p+(1-p))}{p^2}\right)'-\frac{1}{p^2}=-p\left(\frac{1-p}{p^2}\right)'-\frac{1}{p^2}=-p\frac{-p^2-2p(1-p)}{p^4}-\frac{1}{p^2}=p\frac{p^2+2p-2p^2}{p^4}-\frac{1}{p^2}\\&=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

3.
$$\mathbb{P}(X>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=n}^{+\infty}(1-p)^k=p(1-p)^n\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k=p(1-p)^n\frac{1}{p}=(1-p)^n$$

On obtient alors sans peine

$$\mathbb{P}(X=n+k\,|\,X>k)=\frac{\mathbb{P}(X=n+k)}{\mathbb{P}(X>k)}=\frac{(1-p)^{n+k-1}p}{(1-p)^k}=(1-p)^{n-1}p=\mathbb{P}(X=n)$$

► **Exercice 8** 1. En posant $u=\lambda x$,

$$\int_{\mathbb{R}^+}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^+}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^+}\lambda\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\lambda}=\int_{\mathbb{R}^+}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=[-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty}=1$$

2.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=\int_{\mathbb{R}^+}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^+}x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}+\int_{\mathbb{R}^+}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^+}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}\\\mathbb{E}\left(X^2\right)&=\int_{\mathbb{R}^+}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^+}x^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}+\int_{\mathbb{R}^+}2x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=2\int_{\mathbb{R}^+}x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda}\,\mathbb{E}(X)=\frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

3.
$$\mathbb{P}(X>b)=\int_b^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_b^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_b^{+\infty}=\mathrm{e}^{-\lambda b}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(X>a+b\,|\,X>b)=\frac{\mathbb{P}(X>a+b\wedge X>b)}{\mathbb{P}(X>b)}=\frac{\mathbb{P}(X>a+b)}{\mathbb{P}(X>b)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(a+b)}}{\mathrm{e}^{-\lambda b}}=\mathrm{e}^{-\lambda a}=\mathbb{P}(X>a)$$

4. Notons $F(a)=\mathbb{P}(X\geqslant a)$. D'après la question précédente, on a $F(a+b)=F(a)F(b)$ dont les solutions sont de la forme $t\mapsto\mathrm{e}^{\alpha t}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$. La fonction de densité est alors $f(a)=(\mathbb{P}(X\leqslant a))'=(1-F(a))'=-\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha a}$ et on retrouve une loi exponentielle de paramètre $\lambda=-\alpha$.

► **Exercice 9** 1. On suppose connu la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$. C'est un exercice classique de prépa qui peut se démontrer par intégrale double et passage en coordonnée polaire ou par décomposition en série de Fourier.

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sigma\,\mathrm{d}u=1$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}}(x+m)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + m\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[-\sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + m = m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} x\cdot x\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[-x\sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}}\sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma^2\end{aligned}$$

3. $F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}$

4.

$$\int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2\sigma}^{2\sigma} f(x+m)\,\mathrm{d}x = \int_{-2\sigma}^{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{2}^{2}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}x = F(2) - F(-2)$$

où F est la fonction de répartition de f. Par parité de f, on sait que $F(-x) = 1 - F(x)$ et on cherche donc à évaluer $2F(2) - 1$. On connaît des approximations de F (par développement en série de Taylor) dont il existe des tables. On trouve alors $F(2) \approx 0.97725$ donc $F(2) - 1 \approx 0,9545$. Ainsi, la loi normale prend 95% de ses valeurs dans l'intervalle $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$.