TD 1 – Rappels de probabilités

lionel.rieg@ens-lyon.fr

1 Probabilités discrètes

Exercice 1

Soient A et B des événements de probabilités $\mathbb{P}(A) = 3/4$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Montrez que $1/12 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant 1/3$.
2. Donnez des exemples qui réalisent ces bornes.
3. Donnez des bornes similaires pour $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 2

Étant donnés deux évènements A et B, quelle est la probabilité que exactement l'un des deux évènements survienne ?

Exercice 3

On lance une pièce de monnaie une infinité de fois.

1. Montrez que face tombera à un moment ou un autre, avec probabilité 1.
2. Idem pour toute séquence finie de pile et de face.

Exercice 4

Trouvez une famille d'événements telle que :

– les événements sont deux à deux indépendants
– la famille n'est pas indépendante dans son ensemble.

Exercice 5

Soit $A_1, ..., A_n$ ($n \geqslant 2$), des évènements. Montrez l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \cdots + (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Exercice 6

Soient $(A_n)_{n \geqslant 1}$ des évènements presque certains (*i.e.* tels que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout n). Montrez que $\mathbb{P}(\bigcap_{n \geqslant 1} A_n) = 1$.

Exercice 7

Soient A et B deux évènements indépendants. Montrez que $\overline{A}$ et B sont indépendants. Idem pour $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 8

On considère un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux rois et un as dans une main de 13 cartes ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un as dans une main de 13 cartes, sachant qu'elle contient exactement deux rois ?

Exercice 9 (Formule de Bayes)

1. Donnez deux formulations distinctes de $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Énoncez la formule de Bayes pour $\mathbb{P}(A \mid B)$, puis détaillez-la en partitionnant B avec A et $\overline{A}$.

2 Paradoxes

Exercice 10 (Paradoxes des anniversaires)

1. Dans un groupe de m personnes, quelle est la probabilité que deux personnes aient le même jour de naissance ?
2. A partir de quelle valeur de m cette probabilité est-elle plus grande que 1/2 ?

Exercice 11 (Les deux enfants)

Une famille a deux enfants, dont au moins un est une fille.

1. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
2. Donnez une autre réponse possible à la question précédente.
3. Expliquez pourquoi les deux réponses sont correctes.

Exercice 12 (Les trois pièces)

On lance trois pièces de monnaie. Au moins deux sont du même côté. En regardant la troisième, il y a une chance sur deux que les trois pièces soient du même côté. Expliquez ce phénomène.

Exercice 13 (Paradoxe de Saint-Pétersbourg)

Contre une certaine mise initiale, on joue au jeu suivant : On tire à pile ou face. Si c'est face la banque paye 2 euros et on stoppe le jeu, si c'est pile on relance. Si c'est face la banque paye 4 euros et on stoppe le jeu, si c'est pile on relance pour 8 euros, *etc*. Quelle doit être la mise initiale pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 14 (Paradoxe du Monty Hall)

Dans un jeu télévisé, pour gagner une voiture un candidat doit choisir entre trois portes. Deux d'entre elles sont vides et la troisième contient la voiture. Après que le candidat a choisi une porte, le présentateur ouvre l'une des deux autres qui ne contient rien. On propose alors au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

Exercice 15 (Problème de la Belle au bois dormant)

On joue avec la Belle au bois dormant qui connaît tout le protocole suivant. L'expérience dure de dimanche soir à mercredi. Elle se couche le dimanche soir et on tire une pièce équilibrée à pile ou face.

- Si c'est pile, on réveille la Belle le lundi pour un entretien.
- Si c'est face, on la réveille le lundi et le mardi, chaque fois pour un entretien.

Comme elle est toujours très ensommeillée, la Belle ne sait ni quel jour on est ni ne se souvient de ce qu'elle a fait la veille. Lors de chaque entretien (que la Belle ne sait pas distinguer), on demande à la Belle "A votre avis, quelle est la probabilité que face soit tombé dimanche ?".
Que doit répondre la Belle ?

3 Solutions

▶ **Exercice 1**

1. La borne supérieure correspond à une inclusion de B dans A de sorte que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$. D'où, plus généralement, $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \min \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. Pour la minoration, le plus simple est de voir le problème graphiquement : on cherche à répartir les probabilités de A et B sur l'espace total (de mesure 1) de façon à minimiser le chevauchement. On obtient l'inégalité suivante : $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.
2. Toute inclusion de B dans A réalise la borne supérieure. La borne inférieure peut être réalisé par un lancer de dé à 12 faces, en prenant pour A l'événement « le résultat du dé est inférieur ou égal à neuf » et pour B l'événement « le résultat du dé est supérieur ou égal à neuf ».
3. Par le même type de raisonnement, on obtient $\max \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Les bornes sont atteintes respectivement lorsque B est inclus dans A et lorsque A et B sont disjoints.

▶ **Exercice 2** $\mathbb{P}(A \,\Delta\, B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$. Ne pas oublier le facteur 2, sans quoi il s'agit de l'union.

▶ **Exercice 3**

1. Soit X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de face qui apparaissent dans les n premiers lancers. On cherche à calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$. On a $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 1-\mathbb{P}(X_n = 0)$. Par indépendance des lancers, $\mathbb{P}(X_n = 0) = (\mathbb{P}(X_1 = 0))^n$. On a évidemment $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ (sauf si la pièce n'est pas équilibrée, mais cela ne changerait rien au raisonnement), donc $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to+\infty 1} 1$.
2. Soit σ un motif de longueur $|\sigma|$. On peut utiliser le même raisonnement pour majorer la probabilité de ne pas avoir d'occurrence du motif dans toute suite finie de lancers. Pour cela, on va considérer la variable aléatoire X_n qui compte le nombre d'occurrences de σ dans les $n|\sigma|$ premiers lancers. On a alors $\mathbb{P}(X_n = 0) \leqslant \mathbb{P}(X_1 = 0)^n$ en ne recherchant des motifs que dans les intervalles $[\![n|\sigma|, (n+1)|\sigma|]\!]$ et utilisant l'indépendance des lancers. On conclut alors de même.

▶ **Exercice 4** On prend un univers à 4 éléments équiprobables (par exemple le lancer d'un dé à 4 faces) et on choisit les événements suivants : $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ et $A_3 = \{3, 4\}$. On a :
- pour tout j, $\mathbb{P}\big(A_j\big) = 1/2$
- pour tout $i \neq j$, $\mathbb{P}\big(A_i \cap A_j\big) = 1/4$
- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$

Cette famille n'est pas indépendantes dans son ensemble alors que tous ses éléments sont indépendants deux à deux.

▶ **Exercice 5** La démonstration se fait par récurrence sur n. Afin de savoir précisément quoi démontrer, on va donner une forme close de la formule à démontrer :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S\subset[\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right)$$

Le cas $n = 2$ ($\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$) se traite sans difficulté. Pour le cas général, on commence par utiliser le cas $n = 2$

pour isoler A_{n+1} avant d'utiliser l'hypothèse de récurrence sur les A_i et les $B_i = A_i \cap A_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} B_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|} \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcap_{i\in S} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!]\cup\{n+1\} \\ |S|=k,\, n+1\in S}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n]\!]\cup\{n+1\} \\ |S|=k,\, n+1\in S}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset [\![1,n+1]\!] \\ |S|=k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right)
\end{aligned}$$

► **Exercice 6** On utilise le caractère σ-sous additif (*i.e.* $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ des mesures, qui vient de leur σ-additivité (l'égalité est vraie si les A_i sont deux à deux disjoints). On considère la famille $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ des complémentaires. On a alors $\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$. Or $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 - \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$ donc $\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$.

► **Exercice 7**

$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - (\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$$

► **Exercice 8**
1. Comme il s'agit de probabilités discrètes, on peut utiliser une argument de dénombrement. On doit choisir 2 cartes parmi les 4 rois et une parmi les quatre as. Il reste alors 11 cartes à choisir parmi les 44 cartes restantes du jeu. Le nombre de configuration « favorables » est donc $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{10}$. Le nombre de configuration totale pour une main de 13 cartes est $\binom{52}{13}$. Au final, la probabilité recherchée est $\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{11}}{\binom{52}{13}}$.
2. On peut raisonner de même : les configurations « favorables » sont les mêmes qu'à la question précédente mais dans les configurations possibles, on ne compte que celles qui contiennent déjà 2 rois. Il y en a $\binom{4}{2}\binom{48}{11}$. On peut aussi raisonner par probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(2 \text{ rois et } 1 \text{ as} \,|\, 2 \text{ rois}) = \frac{\mathbb{P}(2 \text{ rois et } 1 \text{ as})}{\mathbb{P}(2 \text{ rois})} = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{11}}{\binom{52}{13}} \Big/ \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}$.

► **Exercice 9**
1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \,|\, B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \,|\, A)\,\mathbb{P}(A)$ d'où $\mathbb{P}(A \,|\, B) = \mathbb{P}(B \,|\, A)\,\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
2. En partitionnant B avec A et $\overline{A}$ au dénominateur, on trouve $\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B|\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$. De façon plus générale, pour une partition $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a :

$$\mathbb{P}(A_i \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(B \,|\, A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \,|\, A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

► **Exercice 10**
1. Notons D l'évènement « Tous les anniversaires sont distincts ».

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{365}{m} m!}{365^m} = 1(1 - \frac{1}{365})(1 - \frac{2}{365}) \ldots (1 - \frac{m-1}{365})$$

2.
$$\mathbb{P}(D) = \prod_{j=1}^{m-1} \underbrace{(1 - \frac{j}{365})}_{\approx e^{-\frac{j}{365}} \text{ si } j \ll 365} \approx e^{-\frac{m(m-1)}{2\cdot 365}} \approx e^{-\frac{m^2}{730}}$$

D'où pour $m \geqslant \sqrt{730 \log 2} \approx 23$, $\mathbb{P}(D) > \frac{1}{2}$.

▶ **Exercice 11** 1. La probabilité qu'un enfant soit un garçon est $\frac{1}{2}$.

2. Considérons les quatre configurations possibles : FF, FG, GF GG. Comme il y a déjà une fille, la dernière est éliminée. Parmi 2 des 3 restantes, il y a un garçon et une fille. D'où une probabilité de $\frac{2}{3}$.
3. La distinction entre ces deux réponses vient de l'indistinguabilité des enfants. Dans le premier cas, on suppose que l'on sait quel enfant est un fille, l'aîné ou le cadet, alors que dans le second on ne sait pas de qui il s'agit.

▶ **Exercice 12** En disant que l'on regarde la troisième pièce, on acquiert l'information que les deux autres sont sur la même face. Ainsi, avoir la deuxième et la troisième pièces sur le même côté implique nécessairement qu'il en est de même de la première. Or la probabilité que deux pièce soient sur le même côté est de $\frac{1}{2}$. Le côté paradoxal vient du fait qu'on acquiert de l'information sur l'ensemble des trois pièces sans en obtenir sur l'une d'entre elles.

▶ **Exercice 13** Il s'agit ici de faire un calcul d'espérance. Les séquences de jeu sont de la forme $P^n F, n \in \mathbb{N}$ et l'on y gagne 2^{n+1} euros. La probabilité d'une telle séquence est $\frac{1}{2^{n+1}}$ par indépendance des lancers. L'espérance totale est donc infinie donc pour n'importe quelle mise finie, il est avantageux de jouer. La plupart des personnes refuseront de jouer une somme arbitraire même si les probabilités leur donnent tort, phénomène appelé l'*aversion au risque*. Il est également peu vraisemblable que la banque puisse payer une somme arbitraire, et si M est la somme maximum qu'elle peut dépenser, la mise initiale qui équilibre le jeu est $\log M$.

▶ **Exercice 14** Au début du jeu, toutes les portes sont équiprobables pour le candidat. La porte choisie initialement a donc une probabilité $\frac{1}{3}$ de contenir la voiture. Lorsque le présentateur ouvre l'une des deux portes restantes, l'information que l'on acquiert ne concernes que ces deux portes et non celle choisie par le candidat (car cette dernière ne peut être choisie). Ainsi la porte initialement choisie a toujours une probabilité $\frac{1}{3}$ de contenir la voiture et la seconde qui reste fermée a donc une probabilité $\frac{1}{3}$ de la contenir. Le candidat a intérêt à changer de porte.

▶ **Exercice 15** De même que dans l'exercice sur les deux enfants, il y a deux réponses possible suivants le point de vue que l'on prend : $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$. Bien que ce problème ait maintenant plus d'une dizaine d'année, il n'y a pas encore de consensus sur la réponse à donner. Voir par exemple l'article de synthèse suivant (en français).