

Évaluation de performance

corrigé du partiel

4 novembre 2010

1 Exercices

Égalité de Chapman-Kolmogorov

1. Par indépendance, $\mathbb{P}(Y_m = i | Y_n = j) = \mathbb{P}(Y_m = i)$. Or comme Y_m est i.i.d., elle suit la même loi que X_0 donc $\forall i \in \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(Y_m = i) = \mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{2}$. On en déduit alors

$$\begin{aligned} p_{ij}(m, m+n+r) &= \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j | Y_m = i) = \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j) = \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j | Y_{m+n} = 1) \mathbb{P}(Y_{m+n} = 1 | Y_n = i) + \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j | Y_{m+n} = -1) \mathbb{P}(Y_{m+n} = -1 | Y_n = i) \\ &= \sum_{k \in \{-1, 1\}} \mathbb{P}(Y_{m+n+r} = j | Y_{m+n} = k) \mathbb{P}(Y_{m+n} = k | Y_n = i) \\ &= \sum_k p_{ik}(n, n+m) p_{kj}(m+n, m+n+r) \end{aligned}$$

2.

$$\mathbb{P}(Y_{2n+2} = 1 | Y_{2n+1} = -1) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(Y_{2n+2} = 1 | Y_{2n+1} = -1, Y_{2n} = 1) = 0$$

3. Posons $Z_n = (Y_n, Y_{n+1})$. On peut déjà remarquer que la seconde composante de Z_n impose la première de Z_{n+1} .

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(Z_{2n+1} = (1, 1) | Z_{2n} = (1, 1)) = 1 & \mathbb{P}(Z_{2n+2} = (1, 1) | Z_{2n+1} = (1, 1)) = 0,5 \\ \mathbb{P}(Z_{2n+1} = (1, -1) | Z_{2n} = (1, 1)) = 0 & \mathbb{P}(Z_{2n+2} = (1, -1) | Z_{2n+1} = (1, 1)) = 0,5 \\ \mathbb{P}(Z_{2n+1} = (-1, 1) | Z_{2n} = (1, -1)) = 0 & \mathbb{P}(Z_{2n+2} = (-1, 1) | Z_{2n+1} = (1, -1)) = 0,5 \\ \mathbb{P}(Z_{2n+1} = (-1, -1) | Z_{2n} = (1, -1)) = 1 & \mathbb{P}(Z_{2n+2} = (-1, -1) | Z_{2n+1} = (1, -1)) = 0,5 \end{array}$$

Écart entre médiane et moyenne

On utilise l'inégalité donnée pour X d'espérance E avec $k = 1$ pour obtenir : $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq \sigma) \leq \frac{1}{2}$. D'où on déduit $m - E \leq \sigma$. On fait alors de même pour $-X$ ce qui nous donne : $\mathbb{P}(\mathbb{E}(X) - X \geq \sigma) \leq \frac{1}{2}$. D'où on déduit $E - m \leq \sigma$. Au total, $|m - E| \leq \sigma$.

Génération d'une variable aléatoire

1. Il s'agit de la « réciproque » de la méthode de l'inverse : si $X \sim \mathcal{L}$, alors $F_X(X) \sim \mathcal{U}([0, 1])$. En effet, si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, alors $F_X(X) \leq a \iff U = F_X(F_X^{-1}(U)) \leq a$ car $F_X^{-1}(U) \sim X$ d'après la méthode de l'inverse. Ainsi, $F_X(X) \sim \mathcal{U}([0, 1])$.
2. On utilise la méthode vue en TD pour générer une variable aléatoire de loi normale à partir d'un générateur uniforme. Il suffit alors de la composer avec la question précédente.
On peut se ramener au cas de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ en remarquant que si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $\mu + \sigma X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Pour générer une variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on combine les méthodes du rejet et de l'inverse : on utilise la méthode du rejet avec une suite de variables aléatoires de loi $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ que l'on peut simuler par la méthode de l'inverse puisque $F^{-1}(x) = \sin x$.

2 Comportement asymptotique d'une chaîne de Markov finie

1. **réflexivité** $p_{ii}(0) = 1 > 0$ donne que $n = m = 0$ conviennent
symétrie il suffit d'inverser n et m
transitivité Soient $i \leftrightarrow j \leftrightarrow k$. Il existe donc n, m, q, r tels que $p_{ij}(n) > 0, p_{ji}(m) > 0, p_{jk}(q) > 0$ et $p_{kj}(r) > 0$. Alors $p_{ik}(n+q) \geq p_{ij}(n)p_{jk}(q) > 0$ et $p_{ki}(m+l) \geq p_{kj}(m)p_{ji}(r) > 0$ d'où $i \leftrightarrow k$.
2. Soient i et j deux états d'une même classe de communication. On va utiliser la caractérisation donnée à la question 6. Par symétrie, il suffit de montrer que si i est transcient, alors j l'est également. Comme $i \leftrightarrow j$, il existe n et m tels que $p_{ij}(n) > 0$ et $p_{ji}(m) > 0$. On a alors par l'inégalité de Chapman-Kolmogorov :

$$p_{jj}(m+k+n) \geq p_{ji}(m)p_{ii}(k)p_{ij}(n) = \alpha p_{ii}(k)$$

où $\alpha \in]0, 1]$. On en déduit que si la série $\sum_{n \geq 0} p_{ii}(n)$ diverge, alors la série $\sum_{n \geq 0} p_{jj}(n)$ diverge également.

3. Soient $i \leftrightarrow j$. Il existe donc n et m tels que $p_{ij}(n) > 0$ et $p_{ji}(m) > 0$. On note d_i et d_j leurs périodes respectives. On a donc $d_i | n+m$ et $d_j | n+m$. Par l'inégalité de Chapman-Kolmogorov, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$p_{ii}(n+m+kd_j) \leq p_{ij}(n)p_{ji}(m)p_{jj}(kd_j) > 0$$

On en déduit $d_i | d_j$ (car il divise la différence pour $k+1$ et k). Par symétrie, on a aussi $d_j | d_i$ d'où au final $d_i = d_j$.

4. Ne pas pouvoir quitter une classe signifie qu'il n'y a pas de transition sortant de la classe. On va voir que cela correspond exactement aux classes de communication récurrentes. Par contraposée, il suffit de montrer qu'une classe qui possède une transition sortante (i, j) est transciente, ce qui revient à montrer qu'un état de cette classe est transcient d'après la question 2. On choisit l'état i , duquel part la transition sortante. Prendre cette transition empêche tout retour vers i donc $\mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) \leq 1 - p_{ij} < 1$, *i.e.* l'état i est transcient.
5. Il suffit de regrouper les classes transcientes au sein d'une même partition et de conserver chaque classe récurrente (donc finale) comme l'un des R_i .
6. Supposons par l'absurde que la chaîne reste dans l'ensemble T . Alors il existe un état de T , appelons-le i , visité une infinité de fois. Ainsi, la probabilité de rester dans T est inférieure à la somme (finie) sur $i \in T$ des probabilité de passer infiniment souvent en i . Mais $\mathbb{P}(N_i \geq k) = \mathbb{P}(T_i < \infty)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ puisque i est transcient. Par majoration, la probabilité de rester infiniment dans T est nulle, *i.e.* presque sûrement, la chaîne ne reste pas dans les états transcientes.
7. La chaîne restreinte n'est pas nécessairement apériodique : prendre par exemple une chaîne à deux états 1 et 2 telle que $p_{12} = p_{21} = 1$. En revanche, comme une classe finale est en particulier une classe de communication, la chaîne restreinte est irréductible.

8. Les sous-ensembles recherchés sont les niveaux de distance modulo d à partir d'un état quelconque e de la classe. Il nous faut tout d'abord montrer que ces sous-ensembles sont stables par P^d pour que restreindre la chaîne à ceux-ci ait bien du sens. Soient donc i un état au niveau d_i . On note $P_i^d = \{j \mid p_{ij}(d) > 0\}$ et on prend $j \in P_i^d$. On va montrer que $d_j \equiv d_i \pmod{d}$. Pour cela, on remarque que comme on se trouve dans une classe finale (donc une classe de communication), il existe n et m tels que $p_{ie}(n) > 0$ et $p_{je}(m) > 0$. Alors $p_{ii}(d+m+d_i) \geq p_{ij}(d)p_{je}(m)p_{ei}(d_i) > 0$ donc $d \mid d+m+d_i$ i.e. $d \mid d_i+m$. Mais d'autre part, $p_{jj}(d_j+m) \geq p_{je}(m)p_{ej}(d_j) > 0$ donc $d \mid d_j+m$. Ainsi, $d \mid d_i - d_j$ i.e. $d_j \equiv d_i \pmod{d}$.

Montrons à présent que les chaînes de Markov induites par P^d sont irréductibles et apériodiques.

irréductibilité Soient i et j deux éléments dans le même niveau de distance modulo d . Comme la classe finale est une classe de communication, il existe n, m, q, r tels que $p_{ei}(n) > 0, p_{ie}(m) > 0, p_{ej}(q) > 0$ et $p_{je}(r) > 0$. On a alors $p_{ij}(m+q) \geq p_{ie}(m)p_{ej}(q) > 0$. Reste à voir que ce chemin est possible dans P^d i.e. que $d \mid m+q$. Par définition de la période $d, d \mid n+m$ puisque $p_{ii}(n+m) > 0$. On a également $n \equiv q[d]$, i.e. $d \mid q-n$ car i et j sont dans le même niveau de distance par rapport à e . On en déduit $d \mid m+n+q-n = m+q$.

apériodicité Il suffit de montrer que la période d'un état du sous-ensemble est 1. Prenons donc un état i . On se donne un ensemble fini de cycles contenant i dont le pgcd des longueurs vaut d . En faisant des macro-transitions de longueur d , on divise par d la longueur de tous ces cycles (elles sont toutes multiples de d par définition de la période) et le nouveau pgcd vaut alors 1.

9. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'aller de T à une classe finale vaut la somme des probabilités d'y aller en $n+1$ étapes pour $n \in \mathbb{N}$. Or y aller en $n+1$ étapes demande de rester dans T pendant n étapes puis de passer. Comme la matrice P^* est écrite dans la base $T \cup \{r_i \mid R_i \text{ classe finale}\}$, rester dans T correspond à la multiplication par la matrice Q et aller de T à une classe finale correspond à la multiplication par B . Ainsi, partant d'une distribution de probabilité π sur T , la probabilité d'aller dans une classe finale est donnée par multiplication par la matrice $\sum_{n \in \mathbb{N}} BQ^n$.
10. L'algorithme commence par calculer les composantes connexes du graphe de la chaîne, i.e. ses parties irréductibles. Chacune forme alors une chaîne de Markov indépendante des autres. Sur chacune, on calcule les classes de communication (i.e. les composantes fortement connexes) et on détermine celles qui sont récurrentes. Dans ces classes finales, on calcule la période et utilise la décomposition cyclique de la question 8 pour se ramener à l'étude de chaînes irréductibles apériodiques pour lesquelles le théorème donné en début de problème assure l'existence d'une unique distribution stationnaire, que l'on peut calculer par résolution matricielle. Enfin, afin d'unifier les différents résultats ainsi obtenu, on utilise la question précédente qui donne la probabilité de passer d'un état transcient dans une classe finale (étant entendu que si l'on commence dans une classe finale, on y reste forcément).
11. La chaîne est irréductible car les états 6 et 7 permettent d'aller dans tous les autres. On voit facilement que les sous-ensembles $\{1, 2\}$ et $\{3, 4, 5\}$ sont des classes finales (fortement connexes = facile à voir + absorbant = les colonnes correspondantes forment des blocs). Les états 6 et 7 sont transcient. La partition des états de la chaîne est donc $T = \{6, 7\}, R_1 = \{1, 2\}$ et $R_2 = \{3, 4, 5\}$. Étudions les classes R_1 et R_2 . Comme $p_{11} > 0$, la classe R_1 est apériodique donc le théorème s'applique et l'on résout le système

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \pi^1 = \pi^1 \iff \pi^1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{13} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

La classe R_2 est périodique de période 2. On considère donc les deux chaînes de Markov de matrice $P_{|R_2}^2$ sur les sous-ensembles donnés par les niveaux de distance modulo 2, à savoir $\{3\}$ et $\{4, 5\}$. La chaîne à un unique état est d'étude triviale. La seconde en revanche, a pour matrice $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$ dont la distribution stationnaire est $\pi^2 = (0, 4; 0, 6)$. Ainsi au sein de R_2 , le régime limite est une alternance entre l'état 3 et les états 4 et 5 avec probabilité 0, 4 et 0, 6 respectivement. Reste à calculer la probabilité

d'aller dans R_1 ou R_2 à partir des états de $T = \{6, 7\}$. On construit donc

$$P^* = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

La solution est alors donnée par la matrice $B \sum_{n \in \mathbb{N}} Q^n = B(I_2 - Q)^{-1}$. Un simple calcul donne alors

$$I_2 - Q = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad (I_2 - Q)^{-1} = \frac{1}{0,4} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,25 & 1,75 \end{pmatrix}$$

On en tire finalement :

$$B(I_2 - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,25 & 1,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$$

À partir de ces informations, on peut par exemple calculer la probabilité d'être dans l'état 1 à partir de l'état 6 : il faut aller dans la classe finale R_1 puis être dans l'état 1 au sein de R_1 , ce qui se fait avec probabilité $0,2 \cdot \frac{8}{13} = \frac{8}{65}$.

Autre exemple : si initialement tous les états sont équiprobables, alors on peut calculer la distribution finale : $\pi_1 = \frac{8}{35}, \pi_2 = \frac{1}{7}, \pi_3 = \frac{22}{35}, \pi_4 = \frac{44}{175}, \pi_5 = \frac{66}{175}, \pi_6 = 0, \pi_7 = 0$. On remarque que la somme ne fait pas 1 et cette erreur se justifie par l'alternance au sein de R_2 : la distribution stable suit en fait un cycle de période 2, à savoir $(\frac{8}{35}, \frac{1}{7}, \frac{22}{35}, 0, 0, 0, 0)$ et $(\frac{8}{35}, \frac{1}{7}, 0, \frac{44}{175}, \frac{66}{175}, 0, 0)$.