

Partiel INF242, 2009-2010

Stéphane Devismes

Pascal Lafourcade

Lundi 22 mars 2010

Total : 120 points

Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes personnelles format A4

Le barème des exercices est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

Exercice 1 (Complétude : 15 points) Soit A la formule

$$(((a \Rightarrow \neg b) \Leftrightarrow \neg c) \wedge (c \vee d)) \wedge (a \Leftrightarrow d)$$

1. (1 points) Ecrire l'arbre associé à A .
2. (2 points) Donner la définition de tautologie et de contradiction.
3. (2 points) A est-elle une tautologie ? (justifier)
4. (2 points) A est-elle une contradiction ? (justifier)
5. (4 points) Donner la forme normale conjonctive de A (détailler).
6. (4 points) Donner la forme normale disjonctive de A (détailler).

□

Exercice 2 (Formalisation : 20 points) Rappelons que : « x à moins que y » se formalise en $\neg(x \Leftrightarrow y)$.

Dans une maison hantée, les esprits se manifestent sous deux formes différentes, un **chant obscène** et un **rire sardonique**, dont on peut cependant influencer le comportement en jouant de l'orgue ou en brûlant de l'encens. Compte-tenu des données suivantes :

- (i) Le chant ne se fait pas entendre, à moins que l'on joue de l'orgue sans que le rire se fasse entendre.
- (ii) Si on brûle de l'encens, le rire se fait entendre si et seulement si le chant se fait entendre.
- (iii) (En ce moment) Le chant se fait entendre et le rire est silencieux.

Et de la conclusion :

- (iv) (En ce moment) On joue de l'orgue et on ne brûle pas d'encens.

Nous posons :

- c : le chant se fait entendre
- o : on joue de l'orgue
- r : le rire se fait entendre
- e : on brûle de l'encens

1. (2 points) Simplifier en produit de clauses $\neg(x \Leftrightarrow y)$.
2. (9 points) Formaliser sous forme de produits de clauses les hypothèses et la **négation de la conclusion**.
3. (9 points) Prouver par résolution que le raisonnement est correct.

□

Exercice 3 (Davis et Putnam : 15 points) Dans l'arbre d'appel vous étiquetterez les étapes comme suit :

- suppression des clauses valides, en abrégé VAL
- réduction, en abrégé RE,
- enlèvement des clauses ayant des littéraux isolés, en abrégé ELI
- résolution unitaire, abrégé en RU.

Considérons l'ensemble de clauses suivant :

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{f}, a + b + f, e + \bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + c, d + a + \bar{d}, a + b, \bar{a} + \bar{c} + \bar{d}, d$$

- (10 points) Appliquer l'algorithme de Davis et Putnam sur cet ensemble de clauses et conclure si cet ensemble est satisfaisable ou non.
- (5 points) Donner un modèle ou un contre-modèle obtenu à partir de la trace de l'algorithme.

□

Exercice 4 (Stratégie complète : 20 points) Soit les clauses suivantes

$$p + q, \bar{p} + s, \bar{s} + t, \bar{t}, \bar{q} + r, \bar{r}, \bar{r} + p + t, q + z + \bar{z}, \bar{q} + r + s$$

Appliquer l'algorithme de la stratégie complète sur cet ensemble de clauses et conclure si cet ensemble est satisfaisable ou non.

□

Exercice 5 (Dédution Naturelle : 20 points) (Exercice vu en TD).

Donnez une preuve sous forme de tableau à quatre colonnes (contexte, numéro de ligne, formule, justification) des formules suivantes :

- (5 points) $a \wedge b \Rightarrow b \wedge a$
- (5 points) $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \Rightarrow (a \wedge c \Rightarrow b \wedge d)$
- (5 points) $(b \vee c)$ dans l'environnement $((b \Rightarrow \perp) \Rightarrow c)$.

□

Exercice 6 (Incomplétude : 30 points) Nous rappelons la définition de la taille d'une formule A , notée $|A|$, est définie inductivement par :

- $|\top| = 0$ et $|\perp| = 0$.
- $|x| = 0$, si x est une variable.
- $|\neg A| = 1 + |A|$.
- $|A \circ B| = |A| + |B| + 1$, si \circ est une des opérations \cdot ou $+$.

Nous rappelons qu'un ensemble de constantes (\top, \perp) et de connecteurs est complet, si toute fonction booléenne est exprimable avec ces constantes et ces connecteurs.

Montrons d'une autre manière que celle vue en TD que l'ensemble $\{0, 1, \vee, \wedge\}$ est incomplet.

- (25 points) Montrer par induction que toute formule d'une seule variable constituée de $\{\top, \perp, \vee, \wedge\}$ est équivalente à une formule de taille nulle.
- (2 points) Quelle est la taille de $\neg x$?
- (3 points) En déduire que l'ensemble $\{\top, \perp, \vee, \wedge\}$ est incomplet.

□

1 Corrigés

Exercice 1, page 1

Pour les FND et FNC

- -2 points si pas de détail des calculs
- -1 point par erreur de simplification

1. Facile

2. - une tautologie est une formule qui a la valeur 1 pour toute assignation.
- une contradiction est une formule qui a la valeur 0 pour toute assignation.

3. non car Contre-modèle = $c = 0 = d$

4. non car Modèle = $a = b = c = d = 1$

5. $(\bar{a} + \bar{b} + c)(a + \bar{c})(b + \bar{c})(c + d)(a + \bar{d})(\bar{a} + d)$

6. $abcd + a\bar{b}\bar{c}d$

Exercice 2, page 1

- formalisation 2 points (i) et 1 point les autres
- Mise en clause 4 points pour 8 clauses soit 0.5 par clause

1. $(\bar{x} + \bar{y}).(x + y)$

2. (i) $\neg(\neg c \Leftrightarrow (o \wedge \neg r))$ donne

- Hyp (1) $c + \bar{o} + r$

- Hyp (2) $\bar{c} + o$

- Hyp (3) $\bar{c} + \bar{r}$

(ii) $e \Rightarrow (r \Leftrightarrow c)$ donne $\bar{e} + c + \bar{r}, \bar{e} + r + \bar{c}$

- Hyp (4) $\bar{e} + c + \bar{r}$

- Hyp (5) $\bar{e} + r + \bar{c}$

(iii) $c \wedge \neg r$ donne c, \bar{r}

- Hyp (6) c

- Hyp (7) \bar{r}

(iv) $o \wedge \neg e$ donne pour la négation de la conclusion nous avons $\bar{o} + e$.

- Hyp (8) $\bar{o} + e$

3. 1. $\bar{c} + o$ Hyp (2)

2. c Hyp (6)

3. o Résolvant de 1,2

4. $\bar{e} + r + \bar{c}$ Hyp (5)

5. \bar{r} Hyp (7)

6. $\bar{e} + \bar{c}$ Résolvant de 4,5

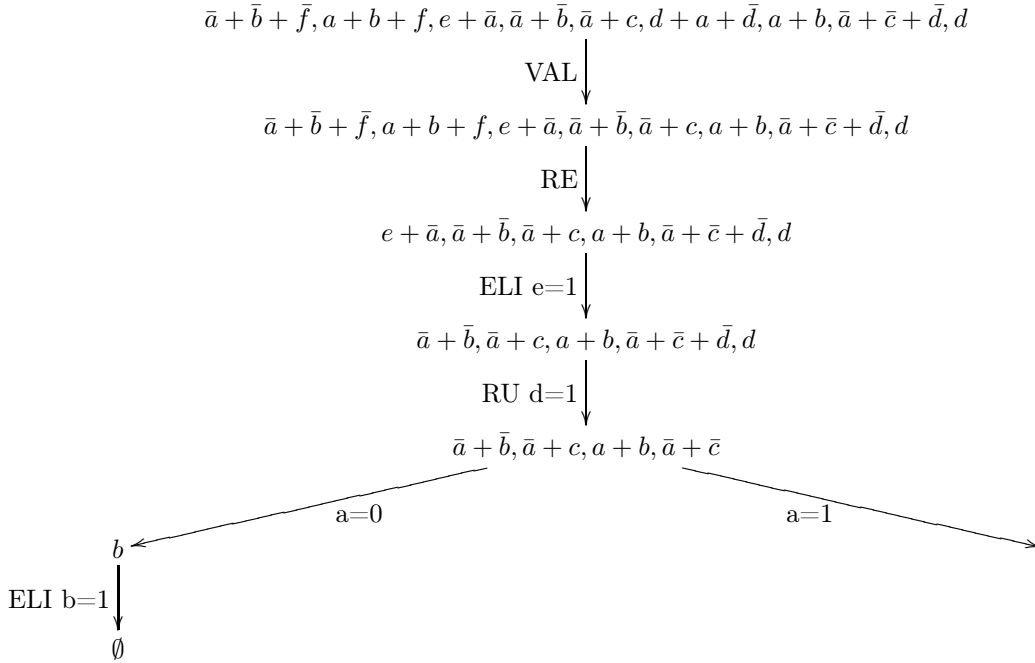
7. \bar{e} Résolvant de 2, 6

8. $\bar{o} + e$ Hyp (8)

9. \bar{o} Résolvant de 7,8

10. \perp Résolvant de 3,9

Exercice 3, page 2



Un modèle est $a = 0, b = 1, d = 1, e = 1$

Exercice 4, page 2

- -1 point par oubli de résolvant
- -1 par oubli de réduction d ensemble
- -5 un faux résolvant

k	Δ_k	Θ_k	$\Delta_k \cup \Theta_k$	Rés de Δ_k & $\Delta_k \cup \Theta_k$
0	$p + q, \bar{p} + s, \bar{s} + t, \bar{t}, \bar{q} + r, \bar{r}$	\emptyset	$p + q, \bar{p} + s, \bar{s} + t, \bar{t}, \bar{q} + r, \bar{r}$	$q + s, p + r, \bar{p} + t, \bar{s}, \bar{q}$
1	$q + s, p + r, \bar{p} + t, \bar{s}, \bar{q}$	$p + q, \bar{p} + s, \bar{t}, \bar{r}$	$q + s, p + r, \bar{p} + t, \bar{s}, \bar{q}, p + q, \bar{p} + s, \bar{t}, \bar{r}$	$s, q, r + t, r + s, p, \bar{p}, t + q$
2	$s, q, r + t, r + s, p, \bar{p}$	$\bar{s}, \bar{q}, \bar{t}, \bar{r}$	$s, q, r + t, r + s, p, \bar{p}, \bar{s}, \bar{q}, \bar{t}, \bar{r}$	\perp
3	\perp	\emptyset	\perp	\emptyset
4	\emptyset	\perp		

Exercice 5, page 2

- -1 point par oubli de justification d'application d'une règle
- Preuve de $a \wedge b \Rightarrow b \wedge a$

supposons $(a \wedge b)$
a
b
$b \wedge a$
donc $(a \wedge b \Rightarrow b \wedge a)$

- Preuve de $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \Rightarrow (a \wedge c \Rightarrow b \wedge d)$

supposons $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d)$
$a \Rightarrow b$
$c \Rightarrow d$
supposons $(a \wedge c)$
a
b
c
d
$b \wedge d$
donc $a \wedge c \Rightarrow b \wedge d$
donc $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \Rightarrow (a \wedge c \Rightarrow b \wedge d)$

– Preuve de $(b \vee c)$ dans l’environnement $((b \Rightarrow \perp) \Rightarrow c)$:

supposons $(b \vee c) \Rightarrow \perp$
supposons $b \Rightarrow \perp$
c
$b \vee c$
\perp
donc $(b \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$
b
$b \vee c$
\perp
donc $((b \vee c) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp .$
$b \vee c .$

Exercice 6, page 2

– Montrer par induction que toute formule d’une seule variable constituée de $\{0, 1, +, .\}$ se simplifie en une formule de taille nulle.

Par induction sur la taille de la formule :

– Soit une formule de taille 0, la propriété est vérifiée.

– Supposons la propriété vraie pour une formule F de taille k , montrons qu’elle est encore vraie pour $k+1$. Nous distinguons 2 cas, F est de la forme $A.B$ ou $A + B$. Remarquons que $|A|$ et $|B|$ sont inférieures à k .

– $F = A.B$ par Hypothèse de Récurrence B se réduit en une formule de taille nulle. Nous distinguons les trois cas possible pour la forme réduite de B :

1. $F = A+0$ en utilisant $x+0 = x$ nous avons $F = A$, or $|A| \leq k$ donc par Hypothèse de Récurrence A se réduit en une formule de taille 0.

2. $F = A+1$ en utilisant $x+1 = 1$ nous avons $F = 1$, cqfd.

3. $F = A+x$, or $|A| \leq k$ donc par Hypothèse de Récurrence A se réduit en une formule de taille nulle. Nous distinguons les trois cas possibles pour la forme réduite de A

– $A = 0$, donc $F = x$ cqfd.

– $A = 1$, donc $F = 1$ cqfd.

– $A = x$, donc $F = x+x = x$ cqfd

– $F = A+B$ par Hypothèse de Récurrence B se réduit en une formule de taille nulle. Nous distinguons les trois cas possible pour la forme réduite de B :

1. $F = A.0$ en utilisant $x.0 = 0$ nous avons $F = 0$, cqfd.

2. $F = A.1$ en utilisant $x.1 = x$ nous avons $F = A$, or $|A| \leq k$ donc par Hypothèse de Récurrence A se réduit en une formule de taille nulle.

3. $F = A.x$ or $|A| \leq k$ donc par Hypothèse de Récurrence A se réduit en une formule de taille nulle. Nous distinguons les trois cas possibles pour la forme réduite de A
- $A = 0$, donc $F = 0$ cqfd.
 - $A = 1$, donc $F = x$ cqfd.
 - $A = x$, donc $F = x.x = x$ cqfd.
- Quelle est la taille de $\neg x$? $|\neg x| = 1 + |x| = 1 + 0 = 1$
- $\neg x$ est de taille 1, et ne peut pas se simplifier en une formule de taille zéro (table de vérité). Donc la fonction booléenne associée à la formule $\neg x$ n'est pas exprimable dans l'ensemble $\{0, 1, +, \cdot\}$. Nous en déduisons que l'ensemble $\{0, 1, +, \cdot\}$ est incomplet.