Examen deuxième session INF242, 2009-2010

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade

17 juin 2010 (8h00 - 10h00)
Total : 100 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes personnelles manuscrites format A4. Le barème des exercices est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

Exercice 1 (Davis et Putnam : 20 points) *Exercice du poly.*

– *(5 points) Rappeler l'algorithme de Davis et Putnam.*
– *(10 points) Donner une trace de l'algorithme de Davis et Putnam pour l'ensemble suivant :*

$$a+b+c+d+e+f, \overline{a}+b, \overline{b}+a, \overline{c}+d, \overline{d}+c, \overline{b}+\overline{c}, \overline{b}+c, b+\overline{c}, \overline{e}, \overline{f}$$

– *(5 points) Conclure en fonction de la trace de l'algorithme si cette ensemble de clauses est satisfaisable ou insatisfaisable.*

□

Exercice 2 (Formaliser : 20 points) *Bientôt les vacances ...*

– *Jules n'est jamais en vacances quand il lit le journal.*
– *Pour que Jules soit à la mer, il suffit qu'on soit en été.*
– *Si Jules est à la mer mais qu'il n'est pas en forme alors il lit le journal.*
– *Il est impossible qu'on ne soit pas en été et que Jules ne soit pas à la mer.*
– *Quand Jules n'est pas en vacances alors il ne lit pas le journal.*

1. *Modéliser ce problème en logique des propositions :*
   (a) *(5 points) Identifier les propositions simples de ce texte et associer y des symboles propositionnels,*
   (b) *(5 points) Traduire chaque énoncé par une formule de la logique des propositions utilisant ces symboles.*
   (c) *(5 points) Transformer les formules obtenues en clauses.*
2. *(5 points) Montrer à l'aide de la méthode de votre choix que « Jules est en forme ».*

□

Exercice 3 (Déduction naturelle : 20 points) *Prouver par déduction naturelle la formule*

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \land \exists x(P(x) \land R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land R(x))$$

□

Exercice 4 (Résolution : 20 points) *Prouver par résolution que les 6 formules suivantes sont contradictoires, où S,H sont des constantes, V une relation unaire et M,F deux relations binaires.*

1. $\neg V(S)$
2. $V(H)$
3. $\forall p \forall v(F(p,v) \Rightarrow V(v))$
4. $\forall m \exists p(\neg F(p,m) \Rightarrow M(p,m))$
5. $\forall x \forall p(V(x) \Rightarrow F(p,x))$
6. $\forall p(\neg M(p,S) \lor \neg F(p,H))$

□

Exercice 5 (Herbrand : 10 points) *Soit* $\Gamma = \{P(x), \neg P(f(x)), P(f(f(x))), \neg P(f(f(x))) \lor \neg P(x) \lor P(f(x))\}$.

– *(6 points) Pour Γ donner la signature, le domaine de Herbrand ainsi que la base de Herbrand.*
– *(4 points) Prouver si la fermeture universelle a un modèle ou pas.*

Indication : Pour prouver que la fermeture n'a pas de modèle, il suffit de trouver un ensemble fini d'instances fermées insatisfiables.

Pour prouver que la fermeture de Γ a un modèle, il faut trouver une interprétation de Herbrand qui soit modèle de l'ensemble des instances fermées de Γ sur son domaine de Herbrand.

□

Exercice 6 (Paradoxe du menteur : 10 points) *Nous nous trouvons sur un île dont les indigènes sont répartis en deux tribus, les Purs et les Pires. Les Purs disent toujours la vérité tandis que les Pires mentent toujours. Est-il possible qu'un habitant dise : "je suis un menteur". Démontrer le en utilisant la logique propositionnelle :*

– *(5 points) Donner une formalisation des habitants cette île et une formalisation de la conjecture faite.*
– *(5 points) Démonstrer avec votre formalisation s'il est possible qu'un habitant dise : "je suis un menteur".*

□

1 Corriges

Exercice 1, page 1

$$
\begin{tikzcd}
a+b+c+d+e+f,\overline{a}+b,\overline{b}+a,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c,b+\overline{c},\overline{e},\overline{f} \arrow[d, "\mathrm{RU}"'] & \\
a+b+c+d,\overline{a}+b,\overline{b}+a,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c,b+\overline{c} \arrow[d, "a=0"'] \arrow[dr, "a=1"] & \\
b+c+d,\overline{b},\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c,b+\overline{c} \arrow[d, "\mathrm{RE}"'] & b,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c,b+\overline{c} \arrow[d, "\mathrm{RE}"'] \\
b+c+d,\overline{b},\overline{c}+d,\overline{d}+c,b+\overline{c} \arrow[d, "\mathrm{RU}"'] & b,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c \arrow[d, "\mathrm{RU}"'] \\
c+d,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{c} \arrow[d, "\mathrm{RU}"'] & \overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{c},c \arrow[d, "\mathrm{RU}"'] \\
d,\overline{d} \arrow[d, "\mathrm{RU}"'] & \perp \\
\perp &
\end{tikzcd}
$$

D'après la trace ci-dessus, l'ensemble est insatisfaisable.

Exercice 2, page 1

$J \Rightarrow \neg V$ c'est-à-dire $\overline{J}+\overline{V}$
$E \Rightarrow M$ c'est-à-dire $\overline{E}+M$
$M \wedge \neg F \Rightarrow J$ c'est-à-dire $\overline{M}+F+J$
$\neg(\neg E \wedge \neg M)$ c'est-à-dire $E+M$
$\neg V \Rightarrow \neg J$ c'est-à-dire $V+\overline{J}$
$\neg F$ négation conclusion

1	$\overline{F}$	Hyp
2	$\overline{M}+F+J$	Hyp
3	$\overline{M}+J$	Res 1,2
4	$\overline{E}+M$	Hyp
5	$E+M$	Hyp
6	M	Res 4,5
7	J	Res 3,6
8	$V+\overline{J}$	Hyp
9	V	Res 7,8
10	$\overline{J}+\overline{V}$	Hyp
11	$\overline{V}$	Res 9,10
12	$\perp$	Res 9,11

Exercice 3, page 2

– (10 points) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$

1	1	**Sup** $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x))$
1,2	2	**Sup** $P(x) \wedge R(x)$
1,2	3	$P(x)$
1,2	4	$P(x) \Rightarrow Q(x)$
1,2	5	$Q(x)$
1,2	6	$R(x)$
1,2	7	$Q(x) \wedge R(x)$
1,2	8	$\exists x(Q(x) \wedge R(x))$
1	9	**Donc** $P(x) \wedge R(x) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$
1	10	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$
1	11	$\exists x(Q(x) \wedge R(x))$
	12	**Donc** $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$

– (10 points) $\exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$

1	1	**Sup** $\exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x))$
1,2	2	**Sup** $\neg(P(x) \vee \neg P(x))$
1,2,3	3	**Sup** $\neg P(x)$
1,2,3	4	$P(x) \vee \neg P(x)$
1,2,3	5	$\perp$
1,2	6	**Donc** $\neg\neg P(x)$
1,2	7	$P(x)$
1,2	8	$P(x) \vee \neg P(x)$
1,2	9	$\perp$
1	10	**Donc** $\neg(P(x) \vee \neg P(x)) \Rightarrow \perp$
1	11	$\perp$
1	12	$\forall x P(x)$
	13	**Donc** $\exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$

Exercice 4, page 2

Forme normale

(i) $\neg V(S)$

(ii) $V(H)$

(iii) $\forall p \forall v(\neg F(p,v) \vee V(v))$

(iv) $\forall m, (F(p,g(m)) \vee M(p,g(m)))$

(v) $\forall x \forall p(\neg V(x) \vee F(p,x))$

(vi) $\exists p, \neg M(p,S) \vee \neg F(p,H)$

Par résolution

(vii) $\neg F(p,S)$ par (i) et (iii)

(viii) $F(p,H$ par (ii) et (v)

(ix) $\neg M(x,S)$ par (viii) et (vi)
(x) $F(g(S),S)$ par (iv) et (ix)
(xi) $\perp$ par (x) et (vii)
Donc le raisonnement est correct

Exercice 5, page 2

- $\Sigma_\Gamma = \{P^{r1}, f^{f1}\}$
- $D_\Gamma = \{a, P^{r1}, f^{f1}\}$
- $B_{\Sigma_\Gamma} = \{P(f^n(a)), n \geq 0\}$
- $\forall(\Gamma)$ n a pas de modèle : $E = \{P(a), P(f(a)), P(f(f(a)))\}$ est une interprétation de Herbrand qui est contradictoire.

Exercice 6, page 2

Cet exercice a pour but de faire réfléchir à la formalisation.
- Dans cette île si un habitant x déclare P, nous avons $x \Leftrightarrow P$.
- $x \Leftrightarrow \neg x$

ou si m signifie menteur et p pur
- $p \Rightarrow \neg m$
- $\neg p \Rightarrow m$

on formalise donc “je suis un menteur” par
- $p \Rightarrow m$
- $\neg p \Rightarrow \neg m$

ces 4 clause sont contradictoires car

$$p \Rightarrow \neg m \wedge \neg p \Rightarrow m \wedge p \Rightarrow m \wedge \neg p \Rightarrow \neg m$$

donne

$$(\neg p \vee \neg m) \wedge (p \vee m) \wedge (\neg p \vee m) \wedge (p \vee \neg m) = 0$$