

# Inf242 : Examen

Michel Lévy

18 mars 2010

Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille RV format A4

Priorité : On rappelle que les quantificateurs et la négation ont la plus grande priorité suivie des priorités dans l'ordre décroissant de la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.

Le barème des exercices est *indicatif*.

**Exercice 1 (Évaluer : 3 points)** Soient les 3 formules suivantes :

$$\exists x p(x)$$

$$\exists x q(x)$$

$$\forall x \neg(p(x) \Leftrightarrow q(x))$$

1. Construire les expansions des trois formules sur le domaine  $\{0, 1, 2\}$ .  
On abrégera les formules atomiques en supprimant les parenthèses, par exemple la formule  $p(0)$  sera notée  $p0$ .
2. Évaluer les 3 formules dans chacune des 3 interprétations ci-dessous. Justifier si possible votre réponse en utilisant les expansions.  
 $I$  est l'interprétation  $P_I = \emptyset, Q_I = \{1\}$   
 $J$  est l'interprétation  $P_I = \{1\}, Q_I = \{0, 1\}$   
 $K$  est l'interprétation  $P_I = \{1\}, Q_I = \{0, 2\}$

Rnse  $\square$

**Exercice 2 (Construire un modèle : 4 points)** Soient les 3 formules suivantes :

$$\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y(r(x,y) \wedge q(y)))$$

$$\forall x(q(x) \Rightarrow \neg \exists y r(x,y))$$

$$\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$$

Trouver un modèle à 2 éléments de ces 3 formules en utilisant la méthode ci-dessous :

1. Construire les expansions des trois formules sur le domaine  $\{0, 1\}$ .  
On abrégera les formules atomiques en supprimant les parenthèses et les virgules, par exemple la formule  $r(0, 1)$  sera notée  $r01$ .
2. Transformer les expansions en produits de clauses.  
Attention l'expansion de la première formule donne 8 clauses.
3. Appliquer l'algorithme de Davis et Putnam pour trouver un modèle et donner la trace de cette application.

On impose d'éliminer d'abord la variable  $p_0$  avec le choix  $p_0 = 0$  : cela devrait vous donner un modèle, sans avoir à éliminer d'autres variables.

Rnse  $\square$

### Exercice 3 (Dédution naturelle : 6 points)

Les preuves demandées ci-dessous devront être justifiées.

1. Donner une preuve en déduction naturelle avec les justifications de la validité de la formule :

$$(\exists x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \Rightarrow q(x)).$$

2. Donner une preuve en déduction naturelle avec les justifications de la validité de la formule :

$$\exists x p(x) \wedge \forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \Rightarrow \exists x p(f(f(x))).$$

3. Notons  $f^n(x)$  le terme obtenu en appliquant  $n$  fois  $f$  à  $x$ .

$$\text{Par exemple } f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)).$$

Soient  $\Gamma, \Delta$  deux ensembles de formules et  $A, B$  deux formules. On rappelle que  $\Gamma \vdash A$  est vrai s'il y a une preuve de  $A$  dans l'environnement  $\Gamma$ .

On donne ci-dessous des propriétés triviales de la relation  $\vdash$

*Monotonie* : si  $\Gamma \vdash A$  et  $\Gamma \subset \Delta$  alors  $\Delta \vdash A$

*Composition* : si  $\Gamma \vdash A$  et  $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$  alors  $\Gamma \vdash B$

- (a) Donnez une preuve en déduction naturelle avec les justifications de ce que la propriété suivante est vraie :

$$\forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \vdash \exists x p(f^n(x)) \Rightarrow \exists x p(f^{n+1}(x))$$

- (b) Dédurre de la propriété ci-dessus, de la monotonie et de la composition que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\exists x p(x), \forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \vdash \exists x p(f^n(x)).$$

Rnse  $\square$

### Exercice 4 (Unification : 3 points)

On rappelle que, suivant nos conventions,  $a$  est une constante. Appliquer l'algorithme d'unification aux équations suivantes :

1.  $f(x, y, g(a, a)) = f(g(y, y), z, z)$

2.  $f(x, y, a) = f(y, g(z, z), x)$

3.  $f(x, y, g(x, y)) = f(y, g(z, z), z)$

Détaillez les calculs effectués. En cas de succès de l'unification, donnez l'unificateur obtenu et en cas d'échec de l'unification, précisez-en les raisons.

Rnse  $\square$

### Exercice 5 (Résolution : 3 points)

Considérons le raisonnement suivant d'hypothèses :

$$\forall x \exists y (p(x) \Rightarrow r(x, y))$$

$$\forall x \exists y (p(y) \vee r(x, y))$$

et de conclusion :

$$\exists x \exists y r(x, y)$$

Montrez que ce raisonnement est correct par la méthode de la résolution, en donnant les étapes suivantes :

1. Transformer en clauses les hypothèses et la négation de la conclusion.
2. Dédire  $\perp$  de ces clauses par les règles de la résolution.  
Indiquer les règles utilisées (copie, factorisation, résolution binaire) et les unificateurs employés.

Rnse  $\square$

**Exercice 6 (Modèle infini : 2 points)**

Considérons les 3 formules suivantes :

$$\forall x \exists y p(x, y)$$

$$\forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z))$$

$$\forall x \neg p(x, x)$$

Soit  $I$  une interprétation de domaine  $D$ .

On admettra la propriété suivante :

si  $I$  est modèle de la formule  $\forall x \exists y p(x, y)$  alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une suite  $a_i$  où  $0 \leq i \leq k$  telle que pour tout  $i$  de 0 à  $k - 1$ ,  $(a_i, a_{i+1}) \in p_I$ .

En utilisant cette propriété, montrez que l'ensemble des 3 formules n'a pas de modèle fini. On suggère de raisonner par l'absurde en supposant que  $D$  est fini. Rnse  $\square$