

Introduction

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Joseph Fourier, Grenoble I

27 Janvier 2010

Goëdel (28 avril 1906 - 14 janvier 1978)



Théorèmes de Gödel

En 1931

Théorème d'incomplétude

Dans n'importe quelle théorie récursivement axiomatisable, cohérente et capable de « formaliser l'arithmétique », on peut construire un énoncé arithmétique qui ne peut être ni prouvé ni réfuté dans cette théorie.

Théorème d'incomplétude

Si T est une théorie cohérente qui satisfait des hypothèses analogues, la cohérence de T , qui peut s'exprimer dans la théorie T , n'est pas démontrable dans T .

Preuve simplifiée

Machine de Turing

Pour tout programme de taille finie, la machine de Turing répond VRAI ou FAUX à une affirmation qu'on lui donne, sans jamais se tromper.

Que signifie alors le théorème de Gödel

Que signifie alors le théorème de Gödel

Si un humain est capable de savoir si la phrase qu'il donne à la machine est vraie ou fausse, la machine est-elle aussi capable de découvrir la vérité ?

La phrase de Gödel

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

La preuve ou que fait la machine ?

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

Deux réponses sont possibles

- ▶ VRAI
- ▶ FAUX

La preuve ou que fait la machine ?

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

VRAI

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase” est donc une affirmation vraie.

La preuve ou que fait la machine ?

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

VRAI

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase” est donc une affirmation vraie.

Si la machine ne se trompe pas, elle ne peut donc pas répondre VRAI.

La preuve ou que fait la machine ?

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

VRAI

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase” est donc une affirmation vraie.

Si la machine ne se trompe pas, elle ne peut donc pas répondre VRAI.

FAUX

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase” est une affirmation fausse.

La preuve ou que fait la machine ?

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

VRAI

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase” est donc une affirmation vraie.

Si la machine ne se trompe pas, elle ne peut donc pas répondre VRAI.

FAUX

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase” est une affirmation fausse.

Si la machine ne se trompe pas, elle ne peut donc pas répondre FAUX.

La preuve ou que fait un homme ?

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

Nous venons de voir que la machine ne peut pas répondre VRAI.

La preuve ou que fait un homme ?

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

Nous venons de voir que la machine ne peut pas répondre VRAI.
Nous savons aussi que cette phrase est une vérité.

La preuve ou que fait un homme ?

”La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase”

Nous venons de voir que la machine ne peut pas répondre VRAI.
Nous savons aussi que cette phrase est une vérité.
Pourtant la machine ne pourra pas la découvrir...

Question dans Don Quichotte :

À la frontière d'un pays, il faut dire la vérité sinon c'est la pendaison

Un garde frontière vous demande :

“ Pourquoi venez-vous ?”

Vous répondez :

Question dans Don Quichotte :

À la frontière d'un pays, il faut dire la vérité sinon c'est la pendaison

Un garde frontière vous demande :

“ Pourquoi venez-vous ?”

Vous répondez :

“ Pour être pendu !”

Don quichotte de Miguel de Cervantes

“Par une ancienne loi de cette île, tout homme qui vient après la retraite sonnée pour passer ce pont est obligé de nous déclarer, sous la foi du serment, où il va. S’il dit la vérité nous le laissons passer sans obstacle ; s’il fait le moindre mensonge, il est pendu sur-le-champ à une potence dressée à l’autre bout de ce pont. Cette loi est connue de tous les habitants de votre île. Tout à l’heure l’homme que voici s’est présenté pour passer : nous l’avons interrogé suivant l’usage ; il a levé la main et nous a répondu qu’il alloit se faire pendre à cette potence.”

Don quichotte

“Si nous le pendons en effet , il a dit vrai , et ne mérite pas la mort ; si nous le laissons passer, il a menti , et la loi veut qu’il soit pendu....
Mais écoutez : quelle que soit notre décision, nous manquerons toujours à la loi ;
s’il est pendu, nous sommes en faute, puisqu’il aura dit la vérité ;
s’il n’est pas pendu, nous sommes encore en faute, puisqu’il nous aura menti.

Don quichotte

“Si nous le pendons en effet , il a dit vrai , et ne mérite pas la mort ; si nous le laissons passer, il a menti , et la loi veut qu’il soit pendu....

Mais écoutez : quelle que soit notre décision, nous manquerons toujours à la loi ;

s’il est pendu, nous sommes en faute, puisqu’il aura dit la vérité ;

s’il n’est pas pendu, nous sommes encore en faute, puisqu’il nous aura menti.

Nous n’avons donc que le choix de deux fautes : or , dans ce cas , nous devons choisir celle qui ne fait de mal qu’à nous. Qu’on laisse passer cet homme ; s’il aime tant à être pendu , nous le punissons assez en le contrariant pour aujourd’hui.”

Conclusion

Merci de votre attention.

Questions ?

Devise d'Oxford

The more I study, the more I know
The more I know, the more I forget
The more I forget, the less I know