

Déduction Naturelle Premier Ordre : Cohérence

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Joseph Fourier, Grenoble I

Avril 2010

Plan

Plan

Cohérence et Complétude

Cohérence et Complétude

- ▶ **Nous allons montrer la cohérence des règles de notre système.**

Cohérence et Complétude

- ▶ **Nous allons montrer la cohérence des règles de notre système.**
- ▶ **Nous admettrons sans preuve que ce système est complet.** On trouvera des preuves de complétude pour des systèmes de règles proches dans les livres suivants :
 - ▶ Peter B.Andrews. *An introduction to mathematical logic : to truth through proof*. Academic Press, 1986.
 - ▶ Herbert B.Enderton. *A mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 2001.

Plan

Rappel : Règles « propositionnelle »

Tableau 3.1.5

Introduction	Élimination
$[A]$ \dots $\frac{B}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$	$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E$
$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E1$ $\frac{A \wedge B}{B} \wedge E2$
$\frac{A}{A \vee B} \vee I1$ $\frac{A}{B \vee A} \vee I2$	$\frac{A \vee B \quad A \Rightarrow C \quad B \Rightarrow C}{C} \vee E$
Règle du faux	
$\frac{\perp}{A} \text{E}f\text{q}$	
Règle à l'absurde	
$\frac{\neg \neg A}{A} \text{R}AA$	

Récapitulatif des règles des quantificateurs : Tableau 6.1

$\frac{A}{\forall xA} \quad \forall I$	<p>x ne doit être libre</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ ni dans l'environnement de la preuve, ▶ ni dans le contexte de la prémisse de la règle
$\frac{\forall xA}{A \langle x := t \rangle} \quad \forall E$	<p>t est libre pour x dans A</p>
$\frac{A \langle x := t \rangle}{\exists xA} \quad \exists I$	<p>t est libre pour x dans A</p>
$\frac{\exists xA \quad (A \Rightarrow B)}{B} \quad \exists E$	<p>x ne doit être libre</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ ni dans l'environnement ▶ ni dans B, ▶ ni dans le contexte de la prémisse droite de la règle.

Règle de la copie

La règle de copie consiste à déduire d'une formule, une autre formule égale au changement près des variables liées.

$$\frac{A'}{A} \text{ copie}$$

Rappel : Deux formules sont égales à un changement près de variables liées si on peut obtenir l'une à partir de l'autre par des remplacements de sous-formules, de la forme QxA par QyA < $x := y$ > où Q est un quantificateur et y est une variable qui ne figure pas dans QxA .

Réflexivité et Congruence

Deux règles caractérisent l'égalité :

- ▶ un terme est égal à lui-même
- ▶ si deux termes sont égaux, on peut les remplacer l'un par l'autre.

Réflexivité et Congruence

Deux règles caractérisent l'égalité :

- ▶ un terme est égal à lui-même
- ▶ si deux termes sont égaux, on peut les remplacer l'un par l'autre.

$\overline{t=t}$	réflexivité	t est un terme
$\frac{s=t \quad A\langle x:=s \rangle}{A\langle x:=t \rangle}$	congruence	s et t sont deux termes libres pour la variable x dans la formule A

Plan

Rappel

Nous allons utiliser deux résultats vu dans la première partie du cours sur **la logique du premier ordre** :

Théorème 4.3.36

Soit A une formule et t un terme **libre** pour la variable x dans A . Soit I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons :

$$[A \langle x := t \rangle]_{Ie} = [A]_{Ie[x=d]} \text{ où } d = [[t]]_{Ie}.$$

Corollaire 4.3.38

Soit A une formule et t un terme **libre** pour x dans A .

Les formules $\forall xA \Rightarrow A \langle x := t \rangle$ et $A \langle x := t \rangle \Rightarrow \exists xA$ sont valides.

Propriétés de la conséquence

Propriété 6.2.1

Soit Γ un ensemble de formules, x une variable et A une formule.

Supposons que x n'est pas libre dans Γ , alors on a :

$\Gamma \models A$ si et seulement si $\Gamma \models \forall xA$

Preuve de la propriété 6.2.2

⇒ Supposons que $\Gamma \models A$.

Soit le une interprétation et un état modèle de Γ .

Puisque x n'est pas libre dans Γ , pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x , lf et le donnent la même valeur aux formules de Γ , donc lf est modèle de Γ .

Puisque $\Gamma \models A$, lf est modèle de A , donc le est modèle de $\forall xA$.

Preuve de la propriété 6.2.2

\Rightarrow Supposons que $\Gamma \models A$.

Soit le une interprétation et un état modèle de Γ .

Puisque x n'est pas libre dans Γ , pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x , lf et le donnent la même valeur aux formules de Γ , donc lf est modèle de Γ .

Puisque $\Gamma \models A$, lf est modèle de A , donc le est modèle de $\forall xA$.

\Leftarrow Supposons que $\Gamma \models \forall xA$.

Puisque la formule $\forall xA \Rightarrow A$ est valide (d'après le corollaire 4.3.38), on a $\Gamma \models A$.

Propriétés de la conséquence

Propriété 6.2.2

Soit Γ un ensemble de formules, x une variable, A et B deux formules.

Supposons que x n'est libre ni dans Γ , ni dans B , alors on a :

$\Gamma \models A \Rightarrow B$ si et seulement si $\Gamma \models (\exists xA) \Rightarrow B$

Preuve de la propriété 6.2.2

⇒ Supposons que $\Gamma \models A \Rightarrow B$. Soit I une interprétation et e un état tels que Ie est modèle de Γ .

Puisque x n'est pas libre dans Γ , pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x , Ie et If donnent la même valeur aux formules de Γ , donc If est modèle de Γ .

Puisque $\Gamma \models A \Rightarrow B$, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x , If est modèle de $A \Rightarrow B$.

Supposons que Ie est modèle de $\exists xA$, il existe g identique à e sauf pour la valeur de x tel que Ig est modèle de A .

Puisque pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x , If est modèle de $A \Rightarrow B$, alors Ig est modèle de B .

Puisque x n'est pas libre dans B , Ie est modèle de B .

Preuve de la propriété 6.2.2

\Rightarrow Supposons que $\Gamma \models A \Rightarrow B$. Soit I une interprétation et e un état tels que Ie est modèle de Γ .

Puisque x n'est pas libre dans Γ , pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x , If et Ie donnent la même valeur aux formules de Γ , donc If est modèle de Γ .

Puisque $\Gamma \models A \Rightarrow B$, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x , If est modèle de $A \Rightarrow B$.

Supposons que Ie est modèle de $\exists xA$, il existe g identique à e sauf pour la valeur de x tel que Ig est modèle de A .

Puisque pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x , If est modèle de $A \Rightarrow B$, alors Ig est modèle de B .

Puisque x n'est pas libre dans B , Ie est modèle de B .

\Leftarrow Supposons que $\Gamma \models (\exists xA) \Rightarrow B$.

Puisque la formule $A \Rightarrow (\exists xA)$ est valide (d'après le corollaire 4.3.38), on a $\Gamma \models A \Rightarrow B$.

Plan

Cohérence de la déduction

Théorème 6.2.3

Si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Soit Γ un ensemble de formules. Soit P une preuve de A dans cet environnement.

Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la i -ème ligne de la preuve P .

Rappelons que les lignes d'une preuve sont numérotées à partir de 1 et que H_0 est la liste vide.

Notons par Γ, H_i l'ensemble des formules de l'ensemble Γ et de la liste H_i .

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : **si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.**

Soit Γ un ensemble de formules. Soit P une preuve de A dans cet environnement.

Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la i -ème ligne de la preuve P .

Rappelons que les lignes d'une preuve sont numérotées à partir de 1 et que H_0 est la liste vide.

Notons par Γ, H_i l'ensemble des formules de l'ensemble Γ et de la liste H_i .

HR : Supposons que pour tout i où $0 < i < k$, $\Gamma, H_i \models C_i$.

Montrons que, pour $0 < k$, $\Gamma, H_k \models C_k$.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : **si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.**

Soit Γ un ensemble de formules. Soit P une preuve de A dans cet environnement.

Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la i -ème ligne de la preuve P .

Rappelons que les lignes d'une preuve sont numérotées à partir de 1 et que H_0 est la liste vide.

Notons par Γ, H_i l'ensemble des formules de l'ensemble Γ et de la liste H_i .

HR : Supposons que pour tout i où $0 < i < k$, $\Gamma, H_i \models C_i$.

Montrons que, pour $0 < k$, $\Gamma, H_k \models C_k$.

On examine uniquement le cas des nouvelles règles et pour simplifier on ne fait pas de distinctions entre deux formules égales aux abréviations près de la négation et de l'équivalence.

La règle $\forall I$

Supposons que $C_k = \forall xA$ et que cette ligne a été déduite, par la règle $\forall I$, de la formule A avec $A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $A \in \Gamma$.

Si $A = C_i$ et $0 < i < k$, **par hypothèse de récurrence** on a, $\Gamma, H_i \models A$.

Si $A \in \Gamma$ alors $\Gamma \models A$.

Puisque H_0 est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models A$.

D'après les conditions d'application de la règle, x n'est pas libre dans Γ, H_i .

Donc, **d'après la propriété 6.2.1**, on a aussi $\Gamma, H_i \models \forall xA$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k - 1$ et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1} .

Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k , on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. \square

La règle $\forall E$

Supposons que $C_k = A \langle x := t \rangle$ et que cette ligne a été déduite, par la règle $\forall E$, de la formule $\forall xA$ avec $\forall xA = C_i$ et $0 < i < k$ ou $\forall xA \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce que H_0 est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models \forall xA$

D'après les conditions d'applications de la règle, le terme t est libre pour la variable x dans la formule A .

Donc, **d'après le corollaire 4.3.38**, la formule $\forall xA \Rightarrow A \langle x := t \rangle$ est valide et par suite $\Gamma, H_i \models A \langle x := t \rangle$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1} .

Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k , on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. \square

La règle $\exists I$

Supposons que $C_k = \exists xA$ et que cette ligne a été déduite, par la règle $\exists I$, de la formule $A < x := t >$ avec $A < x := t > \Rightarrow C_i$ et $0 < i < k$ ou $A < x := t > \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models A < x := t >$

D'après les conditions d'applications de la règle, le terme t est libre pour la variable x dans la formule A .

Donc, **d'après le corollaire 4.3.38**, la formule $A < x := t > \Rightarrow \exists xA$ est valide et par suite $\Gamma, H_i \models \exists xA$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1} .

Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k , on a on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. \square

La règle $\exists E$

Supposons que $C_k = B$ et que cette formule a été déduite, par la règle $\exists E$, de la formule $\exists xA$ avec $\exists xA = C_i$ et $0 < i < k$ ou $\exists xA \in \Gamma$ et de la formule $A \Rightarrow B$ avec $A \Rightarrow B = C_j$ et $0 < j < k$ ou $A \Rightarrow B \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i et j tels que $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$, $\Gamma, H_i \models \exists xA$ et $\Gamma, H_j \models A \Rightarrow B$.

D'après les conditions d'application de la règle, x n'est libre ni dans Γ, H_j , ni dans B

Donc, **d'après la propriété 6.2.2**, on a aussi $\Gamma, H_j \models (\exists xA) \Rightarrow B$.

Puisque les lignes i et j sont utilisables sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i et H_j sont préfixes de H_{k-1} .

Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k , on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models \exists xA$ et $\Gamma, H_k \models (\exists xA) \Rightarrow B$.

Par suite $\Gamma, H_k \models C_k$. \square

Règle de copie

Supposons que $C_k = A'$ et que cette formule a été déduite, par la règle de copie de la formule A avec $A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $A \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i tel que $0 \leq i < k$, $\Gamma, H_i \vdash A$.

D'après le théorème 4.4.6, les formules A et A' sont équivalentes, nous avons $\Gamma, H_i \vdash A'$. Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1} .

Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k , nous avons $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \vdash C_k$. \square

Réflexivité

Supposons que $C_k = (t = t)$.

Puisque cette formule est valide (dans le sens attribué à l'égalité),

$\Gamma, H_k \models C_k$. \square

Congruence

Supposons que $C_k = A \langle x := t \rangle$ et que cette ligne a été déduite, par la règle de congruence, de la formule $s = t$ avec $(s = t) = C_j$ et $0 < i < k$ ou $(s = t) \in \Gamma$ et de la formule $A \langle x := s \rangle$ avec $A \langle x := s \rangle = C_j$ et $0 < j < k$ ou $A \langle x := s \rangle \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce que H_0 est la liste vide, il existe i et j tels que $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$, $\Gamma, H_i \models (s = t)$ et $\Gamma, H_j \models A \langle x := s \rangle$.

Puisque les lignes i et j sont utilisables sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i et H_j sont préfixes de H_{k-1} .

Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k , on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models (s = t)$ et $\Gamma, H_k \models A \langle x := s \rangle$.

D'après le théorème 4.3.36 et les conditions d'application de la règle, on a : $s = t, A \langle x := s \rangle \models A \langle x := t \rangle$

Par suite $\Gamma, H_k \models C_k$. \square

Plan

Plan du Semestre

AUJOURD'HUI

- ▶ Logique propositionnelle
- ▶ Résolution propositionnelle
- ▶ Dédution naturelle propositionnelle

PARTIEL

- ▶ Logique du premier ordre
- ▶ Dédution naturelle au premier ordre *
- ▶ Base de la démonstration automatique (“résolution au premier ordre”)

EXAMEN

Aujourd'hui

- ▶ DN premier ordre

Prochaine fois

- ▶ Cohérence du système

Conclusion

Merci de votre attention.

Questions ?

Plan

Exercice 1

1.

- ▶ une tautologie est une formule qui a la valeur 1 pour toute assignation.
- ▶ une contradiction est une formule qui a la valeur 0 pour toute assignation.

2. non car Contre-modèle = $c = 0 = d$

3. non car Modèle = $a = b = c = d = 1$

4. $(\bar{a} + \bar{b} + c)(a + \bar{c})(b + \bar{c})(c + d)(a + \bar{d})(\bar{a} + d)$

5. $abcd + a\bar{b}\bar{c}d$

Exercice 2

1. $(\bar{x} + \bar{y}).(x + y)$

2.

(i) $\neg(\neg c \Leftrightarrow (o \wedge \neg r))$ donne▶ Hyp (1) $c + \bar{o} + r$ ▶ Hyp (2) $\bar{c} + o$ ▶ Hyp (3) $\bar{c} + \bar{r}$ (ii) $e \Rightarrow (r \Leftrightarrow c)$ donne $\bar{e} + c + \bar{r}, \bar{e} + r + \bar{c}$ ▶ Hyp (4) $\bar{e} + c + \bar{r}$ ▶ Hyp (5) $\bar{e} + r + \bar{c}$ (iii) $c \wedge \neg r$ donne c, \bar{r} ▶ Hyp (6) c ▶ Hyp (7) \bar{r} (iv) $o \wedge \neg e$ donne pour la négation de la conclusion nous avons $\bar{o} + e$.▶ Hyp (8) $\bar{o} + e$

Exercice 2 suite

1. $\bar{c} + o$ Hyp (2)
2. c Hyp (6)
3. o Résolvant de 1,2
4. $\bar{e} + r + \bar{c}$ Hyp (5)
5. \bar{r} Hyp (7)
6. $\bar{e} + \bar{c}$ Résolvant de 4,5
7. \bar{e} Résolvant de 2, 6
8. $\bar{o} + e$ Hyp (8)
9. \bar{o} Résolvant de 7,8
10. \perp Résolvant de 3,9

Exercice 4

k	Δ_k	Θ_k	$\Delta_k \cup \Theta_k$	Rés de Δ_k & $\Delta_k \cup \Theta_k$
0	$p+q, \bar{p}+s, \bar{s}+t, \bar{t},$ $\bar{q}+r, \bar{r}$	\emptyset	$p+q, \bar{p}+s, \bar{s}+t,$ $\bar{t}, \bar{q}+r, \bar{r}$	$q+s, p+r, \bar{p}+t,$ \bar{s}, \bar{q}
1	$q+s, p+r, \bar{p}+t, \bar{s}, \bar{q}$	$p+q, \bar{p}+s, \bar{t}, \bar{r}$	$q+s, p+r, \bar{p}+t, \bar{s}, \bar{q}, p+q,$ $\bar{p}+s, \bar{t}, \bar{r}$	$s, q, r+t, r+s$ $p, \bar{p}, t+q$
2	$s, q, r+t, r+s, p, \bar{p}$	$\bar{s}, \bar{q}, \bar{t}, \bar{r}$	$s, q, r+t, r+s, p, \bar{p}, \bar{s}, \bar{q}, \bar{t}, \bar{r}$	\perp
3	\perp	\emptyset	\perp	\emptyset
4	\emptyset	\perp		

Exercice 5

CF TD

Exercice 5

CF TD

Preuve de $a \wedge b \Rightarrow b \wedge a$

supposons ($a \wedge b$)
a
b
$b \wedge a$
donc ($a \wedge b \Rightarrow b \wedge a$)

Exercice 5

Preuve de $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \Rightarrow (a \wedge c \Rightarrow b \wedge d)$

supposons $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d)$
$a \Rightarrow b$
$c \Rightarrow d$
supposons $(a \wedge c)$
a
b
c
d
$b \wedge d$
donc $a \wedge c \Rightarrow b \wedge d$
donc $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \Rightarrow (a \wedge c \Rightarrow b \wedge d)$

Exercice 5

Preuve de $(b \vee c)$ dans l'environnement $((b \Rightarrow \perp) \Rightarrow c)$:

supposons $(b \vee c) \Rightarrow \perp$
supposons $b \Rightarrow \perp$
c
$b \vee c$
\perp
donc $(b \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$
b
$b \vee c$
\perp
donc $((b \vee c) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp .$
$b \vee c .$

Exercice 6

Montrer par induction que toute formule d'une seule variable constituée de $\{0, 1, +, \cdot\}$ se simplifie en une formule de taille nulle.

Par induction sur la taille de la formule :

► CAS DE BASE :

Soit une formule de taille 0, seulement \perp, \top ainsi la propriété est vérifiée.

Exercice 6

Supposons la propriété vraie pour une formule F de taille k , montrons qu'elle est encore vraie pour $k + 1$. Nous distinguons 2 cas, F est de la forme $A.B$ ou $A + B$. Remarquons que $|A|$ et $|B|$ sont inférieures à k .

- ▶ $F = A.B$ par Hypothèse de Récurrence B se réduit en une formule de taille nulle. Nous distinguons les trois cas possible pour la forme réduite de B :
 1. $F = A + 0$ en utilisant $x + 0 = x$ nous avons $F = A$, or $|A| \leq k$ donc par Hypothèse de Récurrence A se réduit en une formule de taille 0.
 2. $F = A + 1$ en utilisant $x + 1 = 1$ nous avons $F = 1$, cqfd.
 3. $F = A + x$, or $|A| \leq k$ donc par Hypothèse de Récurrence A se réduit en une formule de taille nulle. Nous distinguons les trois cas possibles pour la forme réduite de A
 - ▶ $A = 0$, donc $F = x$ cqfd.
 - ▶ $A = 1$, donc $F = 1$ cqfd.
 - ▶ $A = x$, donc $F = x + x = x$ cqfd.

Exercice 6

- ▶ $F = A + B$ par Hypothèse de Récurrence B se réduit en une formule de taille nulle. Nous distinguons les trois cas possible pour la forme réduite de B :
 1. $F = A.0$ en utilisant $x.0 = 0$ nous avons $F = 0$, cqfd.
 2. $F = A.1$ en utilisant $x.1 = x$ nous avons $F = A$, or $|A| \leq k$ donc par Hypothèse de Récurrence A se réduit en une formule de taille nulle.
 3. $F = A.x$ or $|A| \leq k$ donc par Hypothèse de Récurrence A se réduit en une formule de taille nulle. Nous distinguons les trois cas possibles pour la forme réduite de A
 - ▶ $A = 0$, donc $F = 0$ cqfd.
 - ▶ $A = 1$, donc $F = x$ cqfd.
 - ▶ $A = x$, donc $F = x.x = x$ cqfd.

Exercice 6

- ▶ Quelle est la taille de $\neg x$? $|\neg x| = 1 + |x| = 1 + 0 = 1$
- ▶ $\neg x$ est de taille 1, et ne peut pas se simplifier en une formule de taille zéro (table de vérité). Donc la fonction booléenne associée à la formule $\neg x$ n'est pas exprimable dans l'ensemble $\{0, 1, +, \cdot\}$. Nous en déduisons que l'ensemble $\{0, 1, +, \cdot\}$ est incomplet.