Base de la démonstration automatique : Skolémisation

Stéphane Devismes   Pascal Lafourcade   Michel Lévy

Université Joseph Fourier, Grenoble I

Avril 2011

Plan

Plan

Introduction

Le théorème de Herbrand s'applique à la fermeture universelle d'un ensemble de formules sans quantificateur.

Introduction

Le théorème de Herbrand s'applique à la fermeture universelle d'un ensemble de formules sans quantificateur.

Pour des formules avec quantificateur existentiel

Introduction

Le théorème de Herbrand s'applique à la fermeture universelle d'un ensemble de formules sans quantificateur.

Pour des formules avec quantificateur existentiel utiliser la skolémisation.

Introduction

Le théorème de Herbrand s'applique à la fermeture universelle d'un ensemble de formules sans quantificateur.

Pour des formules avec quantificateur existentiel utiliser la skolémisation.

Cette transformation est dûe à Thoralf Albert Skolem (1887 - 1963) mathématicien et logicien norvégien.

Généralités

La skolémisation

- change un ensemble de formules fermées en la fermeture universelle d'un ensemble de formules sans quantificateur.

Généralités

La skolémisation

- change un ensemble de formules fermées en la fermeture universelle d'un ensemble de formules sans quantificateur.
- préserve l'existence d'un modèle.

Plan

Exemple 5.2.1

La formule $\exists x P(x)$ est skolémisée en $P(a)$.

On observe les relations suivantes entre ces deux formules :

Exemple 5.2.1

La formule $\exists x P(x)$ est skolémisée en $P(a)$.

On observe les relations suivantes entre ces deux formules :

1. $P(a)$ a pour conséquence $\exists x P(x)$

Exemple 5.2.1

La formule $\exists x P(x)$ est skolémisée en $P(a)$.

On observe les relations suivantes entre ces deux formules :

1. $P(a)$ a pour conséquence $\exists x P(x)$
2. $\exists x P(x)$ n'a pas pour conséquence $P(a)$ mais un modèle de $\exists x\, P(x)$ « donne » un modèle de $P(a)$.

Exemple 5.2.1

La formule $\exists x P(x)$ est skolémisée en $P(a)$.

On observe les relations suivantes entre ces deux formules :

1. $P(a)$ a pour conséquence $\exists x P(x)$
2. $\exists x P(x)$ n'a pas pour conséquence $P(a)$ mais un modèle de $\exists x\, P(x)$ « donne » un modèle de $P(a)$.

   En effet soit I un modèle de $\exists x P(x)$. Donc il existe $d \in P_I$.

   Soit J l'interprétation telle que $P_J = P_I$ et $a_J = d$.

   J est modèle de $P(a)$.

Exemple 5.2.2

La formule $\forall x \exists y Q(x, y)$ est skolémisée en $\forall x Q(x, f(x))$.

On observe les relations entre ces deux formules :

Exemple 5.2.2

La formule $\forall x \exists y Q(x, y)$ est skolémisée en $\forall x Q(x, f(x))$.

On observe les relations entre ces deux formules :

1. $\forall x Q(x, f(x))$ a pour conséquence $\forall x \exists y Q(x, y)$

Exemple 5.2.2

La formule $\forall x \exists y Q(x, y)$ est skolémisée en $\forall x Q(x, f(x))$.

On observe les relations entre ces deux formules :

1. $\forall x Q(x, f(x))$ a pour conséquence $\forall x \exists y Q(x, y)$
2. $\forall x \exists y Q(x, y)$ n'a pas pour conséquence $\forall x Q(x, f(x))$ mais un modèle de $\forall x \exists y Q(x, y)$ « donne » un modèle de $\forall x Q(x, f(x))$.

Exemple 5.2.2

La formule $\forall x \exists y Q(x,y)$ est skolémisée en $\forall x Q(x, f(x))$.

On observe les relations entre ces deux formules :

1. $\forall x Q(x, f(x))$ a pour conséquence $\forall x \exists y Q(x,y)$
2. $\forall x \exists y Q(x,y)$ n'a pas pour conséquence $\forall x Q(x, f(x))$ mais un modèle de $\forall x \exists y Q(x,y)$ « donne » un modèle de $\forall x Q(x, f(x))$.

   Soit I un modèle de $\forall x \exists y Q(x,y)$ et soit D le domaine de I.

   Pour tout $d \in D$, l'ensemble $\{e \in D \mid (d,e) \in Q_I\}$ n'est pas vide, donc il existe $g : D \longrightarrow D$ une fonction telle que pour tout $d \in D$, $g(d) \in \{e \in D \mid (d,e) \in Q_I\}$.

   Soit J l'interprétation J telle que $Q_J = Q_I$ et $f_J = g$: J est modèle de $\forall x Q(x, f(x))$.

Propriétés

La skolémisation sert **à éliminer les quantificateurs existentiels** et **change une formule fermée** A **en une formule** B telle que :

- B a pour conséquence A, ($B \models A$)
- tout modèle de A « donne » un modèle de B

Propriétés

La skolémisation sert **à éliminer les quantificateurs existentiels** et **change une formule fermée** A **en une formule** B telle que :

- B a pour conséquence A, ($B \models A$)
- tout modèle de A « donne » un modèle de B

D'où, A **a un modèle si et seulement si** B **a un modèle** : la skolémisation préserve l'existence d'un modèle, on dit aussi qu'elle préserve la satisfaisabilité.

Plan

Définitions

Définitions

Définition 5.2.3

Une formule fermée est dite propre, si elle ne comporte pas de variable liée par deux quantificateurs distincts.

Définitions

Définition 5.2.3

Une formule fermée est dite propre, si elle ne comporte pas de variable liée par deux quantificateurs distincts.

Exemple 5.2.4

- La formule $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ n'est **pas propre**.

Définitions

Définition 5.2.3

Une formule fermée est dite propre, si elle ne comporte pas de variable liée par deux quantificateurs distincts.

Exemple 5.2.4

- La formule $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ n'est **pas propre**.
- La formule $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$ est **propre**.

Définitions

Définition 5.2.3

Une formule fermée est dite propre, si elle ne comporte pas de variable liée par deux quantificateurs distincts.

Exemple 5.2.4

- La formule $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ n'est **pas propre**.
- La formule $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$ est **propre**.
- La formule $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists x Q(x) \wedge \exists y R(x, y))$ n'est **pas propre**.

Définitions

Définition 5.2.3

Une formule fermée est dite propre, si elle ne comporte pas de variable liée par deux quantificateurs distincts.

Exemple 5.2.4

- La formule $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ n'est **pas propre**.
- La formule $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$ est **propre**.
- La formule $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists x Q(x) \wedge \exists y R(x, y))$ n'est **pas propre**.
- La formule $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y R(x, y))$ est **propre**.

Définitions : forme normale généralisée

En logique du premier ordre une formule est en forme **normale** si elle est sans équivalence, ni implication, et dont les négations portent uniquement sur les formules atomiques.

Comment transformer une formule fermée A en une formule en forme normale sans quantificateur ?

Comment transformer une formule fermée A en une formule en forme normale sans quantificateur ?

1. B = normalisation de A

Comment transformer une formule fermée A en une formule en forme normale sans quantificateur ?

1. B = normalisation de A
2. C = rendre B propre

Comment transformer une formule fermée A en une formule en forme normale sans quantificateur ?

1. B = normalisation de A
2. C = rendre B propre
3. D= Élimination des quantificateurs existentiels de C.
   Cette transformation préserve seulement l'existence de modèle.

Comment transformer une formule fermée A en une formule en forme normale sans quantificateur ?

1. B = normalisation de A
2. C = rendre B propre
3. D= Élimination des quantificateurs existentiels de C.
   Cette transformation préserve seulement l'existence de modèle.
4. E = Transformation de chaque formule fermée, normale, propre et sans quantificateur existentiel de D en une formule normale sans quantificateur.

Comment transformer une formule fermée A en une formule en forme normale sans quantificateur ?

1. B = normalisation de A
2. C = rendre B propre
3. D= Élimination des quantificateurs existentiels de C.
   Cette transformation préserve seulement l'existence de modèle.
4. E = Transformation de chaque formule fermée, normale, propre et sans quantificateur existentiel de D en une formule normale sans quantificateur.

Définition 5.2.5 (skolémisation)

Soit A une formule fermée et E la formule normale sans quantificateur obtenue par la transformation ci-dessus : E est la forme de Skolem de A.

Normalisation

1. Enlever les équivalences
2. Enlever les implications
3. Déplacer les négations vers les formules atomiques

Règles

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\neg\neg A \equiv A$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$$

$$\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$$

Astuce : remplacer $\neg(A \Rightarrow B)$ par $A \wedge \neg B$

Exemple 5.2.6

La forme normale de $\forall y(\forall x P(x, y) \Leftrightarrow Q(y))$ est :

Exemple 5.2.6

La forme normale de $\forall y(\forall x P(x,y) \Leftrightarrow Q(y))$ est :

$$\forall y((\neg\forall x P(x,y) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(y) \vee \forall x P(x,y)))$$

Exemple 5.2.6

La forme normale de $\forall y(\forall x P(x,y) \Leftrightarrow Q(y))$ est :

$$\forall y((\neg\forall x P(x,y) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(y) \vee \forall x P(x,y)))$$

puis par déplacement de la négation en :

$$\forall y((\exists x \neg P(x,y) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(y) \vee \forall x P(x,y)))$$

Transformation en formule propre

Changer le nom des variables liées correctement, par exemple en choisissant de nouvelles variables à chaque changement de nom.

Transformation en formule propre

Changer le nom des variables liées correctement, par exemple en choisissant de nouvelles variables à chaque changement de nom.

Exemple 5.2.7

- La formule $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ est changée en

Transformation en formule propre

Changer le nom des variables liées correctement, par exemple en choisissant de nouvelles variables à chaque changement de nom.

Exemple 5.2.7

- La formule $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ est changée en

  $\boxed{\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)}$

Transformation en formule propre

Changer le nom des variables liées correctement, par exemple en choisissant de nouvelles variables à chaque changement de nom.

Exemple 5.2.7

- La formule $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ est changée en
  $\boxed{\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)}$
- La formule $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists x Q(x) \wedge \exists y R(x, y))$ est changée en

Transformation en formule propre

Changer le nom des variables liées correctement, par exemple en choisissant de nouvelles variables à chaque changement de nom.

Exemple 5.2.7

- La formule $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ est changée en

  $\boxed{\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)}$
- La formule $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists x Q(x) \wedge \exists y R(x, y))$ est changée en

  $\boxed{\forall x (P(x) \Rightarrow \exists z Q(z) \wedge \exists y R(x, y))}$

Élimination des quantificateurs existentiels

Théoreme 5.2.8

Soit A une formule fermée normale et propre ayant une occurrence de la sous-formule $\exists yB$. Soient $x_1, \ldots x_n$ l'ensemble des variables libres de $\exists yB$, où $n \geq 0$. Soit f un symbole ne figurant pas dans A. Soit A' la formule obtenue en remplaçant cette occurrence de $\exists yB$ par $B < y := f(x_1, \ldots x_n) >$ (Si $n = 0$, f est une constante).
La formule A' est une formule fermée normale et propre vérifiant :

1. A' a pour conséquence A
2. Si A a un modèle alors A' a un modèle identique à celui de A sauf pour le sens de f.

Preuve du Théorème 5.2.8

Montrons que A' a pour conséquence A.

Preuve du Théorème 5.2.8

Montrons que A' a pour conséquence A.

Puisque la formule A est fermée et propre, les variables libres de $\exists y B$, qui sont liées à l'extérieur de $\exists y B$, ne sont pas liées par des quantificateurs dans B (sinon la propriété propre ne serait pas respectée), donc le terme $f(x_1, \ldots x_n)$ est libre pour y dans B.

Preuve du Théorème 5.2.8

Montrons que A' a pour conséquence A.

Puisque la formule A est fermée et propre, les variables libres de $\exists yB$, qui sont liées à l'extérieur de $\exists yB$, ne sont pas liées par des quantificateurs dans B (sinon la propriété propre ne serait pas respectée), donc le terme $f(x_1, \ldots x_n)$ est libre pour y dans B.

D'après le corollaire 4.3.38 : $B < y := f(x_1, \ldots x_n) >$ a pour conséquence $\exists yB$. D'où, nous en déduisons que A' a pour conséquence A.

Preuve du théorème 5.2.8

Montrons que tout modèle de A donne un modèle de A'.

Supposons que A a un modèle I où I est une interprétation de domaine D. Soit $c \in D$. Pour tous $d_1, \ldots, d_n, \in D$, soit $E_{d_1,\ldots,d_n}$ l'ensemble des éléments $d \in D$ tels que la formule B vaut 1 dans l'interprétation I et l'état $x_1 = d_1, \ldots, x_n = d_n, y = d$ de ses variables libres. Soit $g : D^n \rightarrow D$ une fonction telle que si $E_{d_1,\ldots,d_n} \neq \emptyset$ alors $g(d_1, \ldots, d_n) \in E_{d_1,\ldots,d_n}$ sinon $g(d_1, \ldots, d_n) = c$. Soit J l'interprétation identique à I sauf que $f_J = g$. Nous avons :

Preuve du théorème 5.2.8

Montrons que tout modèle de A donne un modèle de A'.

Supposons que A a un modèle I où I est une interprétation de domaine D. Soit $c \in D$. Pour tous $d_1, \ldots, d_n, \in D$, soit $E_{d_1,\ldots,d_n}$ l'ensemble des éléments $d \in D$ tels que la formule B vaut 1 dans l'interprétation I et l'état $x_1 = d_1, \ldots, x_n = d_n, y = d$ de ses variables libres. Soit $g : D^n \to D$ une fonction telle que si $E_{d_1,\ldots,d_n} \neq \emptyset$ alors $g(d_1, \ldots, d_n) \in E_{d_1,\ldots,d_n}$ sinon $g(d_1, \ldots, d_n) = c$. Soit J l'interprétation identique à I sauf que $f_J = g$. Nous avons :

1. $[\exists y B]_{(I,e)} = [B < y := f(x_1, \ldots, x_n) >]_{(J,e)}$, ceci d'après l'interprétation de f et le théorème 4.3.36, pour tout état e des variables,

Preuve du théorème 5.2.8

Montrons que tout modèle de A donne un modèle de A'.

Supposons que A a un modèle I où I est une interprétation de domaine D. Soit $c \in D$. Pour tous $d_1, \ldots, d_n, \in D$, soit $E_{d_1,\ldots,d_n}$ l'ensemble des éléments $d \in D$ tels que la formule B vaut 1 dans l'interprétation I et l'état $x_1 = d_1, \ldots, x_n = d_n, y = d$ de ses variables libres. Soit $g : D^n \to D$ une fonction telle que si $E_{d_1,\ldots,d_n} \neq \emptyset$ alors $g(d_1, \ldots, d_n) \in E_{d_1,\ldots,d_n}$ sinon $g(d_1, \ldots, d_n) = c$. Soit J l'interprétation identique à I sauf que $f_J = g$. Nous avons :

1. $[\exists yB]_{(I,e)} = [B < y := f(x_1, \ldots, x_n) >]_{(J,e)}$, ceci d'après l'interprétation de f et le théorème 4.3.36, pour tout état e des variables,
2. $[\exists yB]_{(I,e)} = [\exists yB]_{(J,e)}$, puisque le symbole f est nouveau, la valeur de $\exists yB$ ne dépend pas du sens de f.

Preuve du théorème 5.2.8

Montrons que tout modèle de A donne un modèle de A'.

Supposons que A a un modèle I où I est une interprétation de domaine D. Soit $c \in D$. Pour tous $d_1, \ldots, d_n, \in D$, soit $E_{d_1,\ldots,d_n}$ l'ensemble des éléments $d \in D$ tels que la formule B vaut 1 dans l'interprétation I et l'état $x_1 = d_1, \ldots, x_n = d_n, y = d$ de ses variables libres. Soit $g : D^n \rightarrow D$ une fonction telle que si $E_{d_1,\ldots,d_n} \neq \emptyset$ alors $g(d_1, \ldots, d_n) \in E_{d_1,\ldots,d_n}$ sinon $g(d_1, \ldots, d_n) = c$. Soit J l'interprétation identique à I sauf que $f_J = g$. Nous avons :

1. $[\exists y B]_{(I,e)} = [B < y := f(x_1, \ldots, x_n) >]_{(J,e)}$, ceci d'après l'interprétation de f et le théorème 4.3.36, pour tout état e des variables,
2. $[\exists y B]_{(I,e)} = [\exists y B]_{(J,e)}$, puisque le symbole f est nouveau, la valeur de $\exists y B$ ne dépend pas du sens de f.
3. $\exists y B \Leftrightarrow B < y := f(x_1, \ldots, x_n) > \models A \Leftrightarrow A'$, d'après la propriété du remplacement 1.3.10, qui est aussi vraie en logique du premier ordre.

Preuve du théorème 5.2.8

Montrons que tout modèle de A donne un modèle de A'.

Supposons que A a un modèle I où I est une interprétation de domaine D. Soit $c \in D$. Pour tous $d_1, \ldots, d_n, \in D$, soit $E_{d_1,\ldots,d_n}$ l'ensemble des éléments $d \in D$ tels que la formule B vaut 1 dans l'interprétation I et l'état $x_1 = d_1, \ldots, x_n = d_n, y = d$ de ses variables libres. Soit $g : D^n \rightarrow D$ une fonction telle que si $E_{d_1,\ldots,d_n} \neq \emptyset$ alors $g(d_1, \ldots, d_n) \in E_{d_1,\ldots,d_n}$ sinon $g(d_1, \ldots, d_n) = c$. Soit J l'interprétation identique à I sauf que $f_J = g$. Nous avons :

1. $[\exists y B]_{(I,e)} = [B < y := f(x_1, \ldots, x_n) >]_{(J,e)}$, ceci d'après l'interprétation de f et le théorème 4.3.36, pour tout état e des variables,
2. $[\exists y B]_{(I,e)} = [\exists y B]_{(J,e)}$, puisque le symbole f est nouveau, la valeur de $\exists y B$ ne dépend pas du sens de f.
3. $\exists y B \Leftrightarrow B < y := f(x_1, \ldots, x_n) > \models A \Leftrightarrow A'$, d'après la propriété du remplacement 1.3.10, qui est aussi vraie en logique du premier ordre.

D'après ces trois points, nous obtenons $[A]_{(J,e)} = [A']_{(J,e)}$ et puisque f n'est pas dans A et que les formules A et A' n'ont pas de variables libres, nous avons $[A]_I = [A']_J$. Puisque I est modèle de A, J est modèle de A'.

Remarque 5.2.9

Dans le théorème 5.2.8, il faut constater que la formule A' obtenue à partir de la formule A par élimination d'un quantificateur reste fermée, normale et propre.

Donc, en « appliquant » plusieurs fois le théorème, ce qui implique de choisir un nouveau symbole à chaque quantificateur éliminé, on peut transformer une formule A fermée, normale et propre en une formule B fermée, normale, propre et sans quantificateur existentiel telle que :

- La formule A est conséquence de la formule B
- Si A a un modèle, alors B a un modèle identique sauf pour le sens des nouveaux symboles

Exemple 5.2.10

En éliminant les quantificateurs existentiels de la formule $\exists x \forall y P(x, y) \wedge \exists z \forall u \neg P(z, u)$ on obtient $\forall y P(a, y) \wedge \forall u \neg P(b, u)$.

Il est facile de voir que cette formule a un modèle.

Exemple 5.2.10

En éliminant les quantificateurs existentiels de la formule $\exists x \forall y P(x, y) \wedge \exists z \forall u \neg P(z, u)$ on obtient $\forall y P(a, y) \wedge \forall u \neg P(b, u)$.

Il est facile de voir que cette formule a un modèle.

Remarque : Si on fait l'erreur d'éliminer les deux quantificateurs existentiels avec la même constante a, on obtient la formule $\forall y P(a, y) \wedge \forall u \neg P(a, u)$, qui est insatisfaisable, puisqu'elle a pour conséquence $P(a, a)$ et $\neg P(a, a)$.

Donc il faut impérativement utiliser un nouveau symbole lors de chaque élimination d'un quantificateur existentiel.

Transformation en formule universelle

Théoreme 5.2.11

Soit A une formule fermée, normale, propre et sans quantificateur existentiel.
Soit B la formule obtenue en enlevant de A tous les quantificateurs universels (B est la forme de Skolem de A).

La formule A est équivalente à la fermeture universelle de B.

Transformation en formule universelle

Théoreme 5.2.11

Soit A une formule fermée, normale, propre et sans quantificateur existentiel.
Soit B la formule obtenue en enlevant de A tous les quantificateurs universels (B est la forme de Skolem de A).

La formule A est équivalente à la fermeture universelle de B.

Démonstration.

Avec les conditions posées sur A, la transformation de A en $\forall(B)$ revient à effectuer tous les remplacements possibles des sous formules de la forme

$(\forall x C) \wedge D$ par $\forall x(C \wedge D)$ où x non libre dans D

$(\forall x C) \vee D$ par $\forall x(C \vee D)$ où x non libre dans D

$D \wedge (\forall x C)$ par $\forall x(D \wedge C)$ où x non libre dans D

$D \vee (\forall x C)$ par $\forall x(D \vee C)$ où x non libre dans D

Puisque chacun de ces remplacements change une formule en une autre équivalente, les formules A et $\forall(B)$ sont équivalentes.

Propriété de la skolémisation

Proppriété 5.2.12

Soit A une formule fermée et B la forme de Skolem de A.

- La formule $\forall(B)$ a pour conséquence la formule A
- si A a un modèle alors $\forall(B)$ a un modèle

Donc A a un modèle si et seulement si $\forall(B)$ a un modèle.

Démonstration.

Soit C la formule fermée normale et propre, obtenue au terme des deux premières étapes de la skolémisation de A. Soit D le résultat de l'élimination des quantificateurs existentiels appliquée à C. D'après la remarque 5.2.9 nous avons

- La formule D a pour conséquence la formule C
- si C a un modèle alors D a un modèle.

Puisque les deux premières étapes changent des formules en des formules équivalentes, A et C sont équivalentes. D'après le théorème 5.2.11, D est équivalent à $\forall(B)$. Donc nous pouvons remplacer ci-dessus D par $\forall(B)$ et C par A, CQFD. $\square$

Exemple 5.2.13

Soit $A = \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall xP(x) \Rightarrow \forall xQ(x))$. On skolémise $\neg A$.

Exemple 5.2.13

Soit $A = \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$. On skolémise $\neg A$.

1. $\neg A$ est transformée en la formule normale :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$

Exemple 5.2.13

Soit $A = \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$. On skolémise $\neg A$.

1. $\neg A$ est transformée en la formule normale :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$
2. La formule normale est transformée en la formule propre :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y P(y) \wedge \exists z \neg Q(z)$

Exemple 5.2.13

Soit $A = \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$. On skolémise $\neg A$.

1. $\neg A$ est transformée en la formule normale :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$
2. La formule normale est transformée en la formule propre :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y P(y) \wedge \exists z \neg Q(z)$
3. Le quantificateur existentiel est « remplacé » par une constante :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y P(y) \wedge \neg Q(a)$

Exemple 5.2.13

Soit $A = \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$. On skolémise $\neg A$.

1. $\neg A$ est transformée en la formule normale :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$
2. La formule normale est transformée en la formule propre :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y P(y) \wedge \exists z \neg Q(z)$
3. Le quantificateur existentiel est « remplacé » par une constante :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y P(y) \wedge \neg Q(a)$
4. Les quantificateurs universels sont enlevés :
   $(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(a))$.

Exemple 5.2.13

Soit $A = \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$. On skolémise $\neg A$.

1. $\neg A$ est transformée en la formule normale :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$
2. La formule normale est transformée en la formule propre :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y P(y) \wedge \exists z \neg Q(z)$
3. Le quantificateur existentiel est « remplacé » par une constante :
   $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y P(y) \wedge \neg Q(a)$
4. Les quantificateurs universels sont enlevés :
   $(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(a))$.

Instancions la forme de Skolem de $\neg A$ en remplaçant x et y par a. On obtient la formule $(\neg P(a) \vee Q(a)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(a)$ qui est insatisfaisable. Donc $\forall((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(a))$ est insatisfaisable. Puisque, la skolémisation préserve l'existence d'un modèle, $\neg A$ est insatisfaisable, donc A est valide.

Skolémiser un ensemble de formules

Théoreme 5.2.14

Soit Γ un ensemble de formules fermées. La skolémisation de Γ consiste à appliquer la skolémisation à chaque formule de Γ, en choisissant un nouveau symbole pour chaque quantificateur existentiel éliminé à la troisième étape de la skolémisation.

On obtient ainsi un ensemble Δ de formules sans quantificateurs tel que :

- Tout modèle de $\forall(\Delta)$ est modèle de Γ
- Si Γ a un modèle alors $\forall(\Delta)$ en a un modèle qui ne différe de celui de Γ que par le sens des nouveaux symboles.

Théorie dénombrable

Théoreme 5.2.16

Soit Γ un ensemble dénombrable de formules fermées. Si Γ a un modèle alors Γ a un modèle dénombrable.

Preuve.

Nous skolémisons Γ en un ensemble Δ de formules sans quantificateur. Supposons que Γ a un modèle. Alors $\forall(\Delta)$ a un modèle d'après le théorème 5.2.14. D'après le théorème 5.1.9, $\forall(\Delta)$ a un modèle de Herbrand sur la signature de Δ. Puisque que l'ensemble Γ est dénombrable, sa signature l'est aussi, donc aussi celle de Δ et par suite le domaine de ce modèle de Herbrand est dénombrable. $\square$

Théorie dénombrable

Théoreme 5.2.16

Soit Γ un ensemble dénombrable de formules fermées. Si Γ a un modèle alors Γ a un modèle dénombrable.

Preuve.

Nous skolémisons Γ en un ensemble Δ de formules sans quantificateur. Supposons que Γ a un modèle. Alors $\forall(\Delta)$ a un modèle d'après le théorème 5.2.14. D'après le théorème 5.1.9, $\forall(\Delta)$ a un modèle de Herbrand sur la signature de Δ. Puisque que l'ensemble Γ est dénombrable, sa signature l'est aussi, donc aussi celle de Δ et par suite le domaine de ce modèle de Herbrand est dénombrable. $\square$

Remarque 5.2.17

Appelons théorie, un ensemble de formules. D'après le théorème, toute théorie dénombrable qui a un modèle, a un modèle dénombrable. Or avec une théorie du premier ordre, vous pouvez parler des propriétés des nombres réels ou des ensembles (non dénombrables), donc vous ne pouvez pas obliger votre théorie à n'avoir que des modèles non dénombrables.

Plan

Aujourd'hui

- Skolémisation

Prochaine fois

- Unification
- Résolution au premier ordre

Conclusion

Merci de votre attention.

Questions ?