

Base de la démonstration automatique : Théorème de Herbrand

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Joseph Fourier, Grenoble I

31 Mars 2011

Plan

Introduction

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Plan

Introduction

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Introduction

Rappel : En logique du premier ordre, il n'y a pas d'algorithme pour **décider** si une formule est valide ou non valide.

Introduction

Rappel : En logique du premier ordre, il n'y a pas d'algorithme pour **décider** si une formule est valide ou non valide.

Programme (**semi-décidable**) prenant une formule qui termine :

1. en déclarant la formule valide : preuve de la formule.
2. en déclarant qu'il n'y a pas de preuve de la formule : formule non valide.
3. après épuisement des ressources allouées au programme sans donner de réponse : on ne sait pas alors le statut de la formule.

Introduction

Rappel : En logique du premier ordre, il n'y a pas d'algorithme pour **décider** si une formule est valide ou non valide.

Programme (**semi-décidable**) prenant une formule qui termine :

1. en déclarant la formule valide : preuve de la formule.
2. en déclarant qu'il n'y a pas de preuve de la formule : formule non valide.
3. après épuisement des ressources allouées au programme sans donner de réponse : on ne sait pas alors le statut de la formule.

Nous étudions maintenant un tel programme basé sur la **résolution**.

Plan

Introduction

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Fermeture universelle

Définition 5.1.1

Soit C une formule ayant pour variables libres x_1, \dots, x_n .

La **fermeture universelle** de C , notée $\forall(C)$, est la formule $\forall x_1 \dots \forall x_n C$.

Cette notion est définie à l'ordre près des variables libres de C .

Soit Γ un ensemble de formules, $\forall(\Gamma) = \{\forall(A) \mid A \in \Gamma\}$

Fermeture universelle

Définition 5.1.1

Soit C une formule ayant pour variables libres x_1, \dots, x_n .

La **fermeture universelle** de C , notée $\forall(C)$, est la formule $\forall x_1 \dots \forall x_n C$.

Cette notion est définie à l'ordre près des variables libres de C .

Soit Γ un ensemble de formules, $\forall(\Gamma) = \{\forall(A) \mid A \in \Gamma\}$

Exemple 5.1.2

$\forall(P(x) \wedge R(x, y)) =$

Fermeture universelle

Définition 5.1.1

Soit C une formule ayant pour variables libres x_1, \dots, x_n .

La **fermeture universelle** de C , notée $\forall(C)$, est la formule $\forall x_1 \dots \forall x_n C$.

Cette notion est définie à l'ordre près des variables libres de C .

Soit Γ un ensemble de formules, $\forall(\Gamma) = \{\forall(A) \mid A \in \Gamma\}$

Exemple 5.1.2

$\forall(P(x) \wedge R(x, y)) =$

$\forall x \forall y (P(x) \wedge R(x, y))$ ou $\forall y \forall x (P(x) \wedge R(x, y))$

Généralisation de la substitution

Définition 5.1.3

Une **substitution** est une application des variables dans les termes.

Soit A une formule et σ une substitution.

$A\sigma$ est la formule obtenue en remplaçant toute occurrence libre d'une variable par son image dans l'application.

La formule $A\sigma$ est une **instance** de A .

Hypothèses

Nous considérons que

- ▶ des formules sans le symbole égal, dont le sens est fixé dans toute interprétation.
- ▶ toute signature comporte au moins une constante.

Quitte à ajouter la constante ***a***.

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

1. Le domaine de Herbrand pour Σ est l'ensemble des termes fermés (*i.e.*, sans variable) de cette signature, noté D_Σ .

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

1. **Le domaine de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des termes fermés (*i.e.*, sans variable) de cette signature, noté D_Σ .

Remarque : cet ensemble n'est jamais vide, car $a \in D_\Sigma$.

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

1. **Le domaine de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des termes fermés (*i.e.*, sans variable) de cette signature, noté D_Σ .

Remarque : cet ensemble n'est jamais vide, car $a \in D_\Sigma$.

2. **La base de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des formules atomiques fermées (sauf \top et \perp) de cette signature, notée B_Σ .

Domaine et base de Herbrand

Définition 5.1.4

1. **Le domaine de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des termes fermés (*i.e.*, sans variable) de cette signature, noté D_Σ .

Remarque : cet ensemble n'est jamais vide, car $a \in D_\Sigma$.

2. **La base de Herbrand pour Σ** est l'ensemble des formules atomiques fermées (sauf \top et \perp) de cette signature, notée B_Σ .

Définition 4.3.8 (Rappel)

- ▶ Un *terme* sur Σ est : soit une variable, soit une constante s où $s^{f_0} \in \Sigma$, soit un terme de la forme $s(t_1, \dots, t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{f_n} \in \Sigma$ et où t_1, \dots, t_n sont des termes sur Σ .
- ▶ Une *formule atomique* sur Σ est : soit une des constantes \top, \perp , soit une variable propositionnelle s où $s^{r_0} \in \Sigma$, soit de la forme $s(t_1, \dots, t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{r_n} \in \Sigma$ et où t_1, \dots, t_n sont des termes sur Σ .

Exemple 5.1.5

1. Soit $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{a, b\}$ et $B_\Sigma =$

Exemple 5.1.5

1. Soit $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{a, b\}$ et $B_\Sigma =$

$\{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$.

Exemple 5.1.5

1. Soit $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{a, b\}$ et $B_\Sigma =$

$\{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$.

2. Soit $\Sigma = \{a, f^{f1}, P^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $B_\Sigma =$

Exemple 5.1.5

1. Soit $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{a, b\}$ et $B_\Sigma =$

$$\{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}.$$

2. Soit $\Sigma = \{a, f^{f1}, P^{r1}\}$, $D_\Sigma = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $B_\Sigma =$

$$\{P(f^n(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soit Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soit Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

1. Si le symbole s est une constante de la signature , il vaut lui-même dans cette interprétation.

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soit Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

1. Si le symbole s est une constante de la signature , il vaut lui-même dans cette interprétation.
2. Si s est un symbole de fonction à $n \geq 1$ argument(s) de la signature et si $t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma$ alors

$$s_{H_{\Sigma,E}}^{fn}(t_1, \dots, t_n) = s(t_1, \dots, t_n)$$

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soit Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

1. Si le symbole s est une constante de la signature , il vaut lui-même dans cette interprétation.
2. Si s est un symbole de fonction à $n \geq 1$ argument(s) de la signature et si $t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma$ alors
$$s_{H_{\Sigma,E}}^{fn}(t_1, \dots, t_n) = s(t_1, \dots, t_n)$$
3. Si le symbole s est une variable propositionnelle, il vaut 1, autrement dit il est vrai, si et seulement si $s \in E$

Interprétation de Herbrand

Définition 5.1.6

Soit Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. L'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$ a pour domaine D_Σ et donne aux symboles le sens suivant :

1. Si le symbole s est une constante de la signature, il vaut lui-même dans cette interprétation.
2. Si s est un symbole de fonction à $n \geq 1$ argument(s) de la signature et si $t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma$ alors

$$s_{H_{\Sigma,E}}^{fn}(t_1, \dots, t_n) = s(t_1, \dots, t_n)$$

3. Si le symbole s est une variable propositionnelle, il vaut 1, autrement dit il est vrai, si et seulement si $s \in E$
4. Si s est un symbole de relation de la signature à $n \geq 1$ arguments et si $t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma$ alors

$$s_{H_{\Sigma,E}}^{rn} = \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_1, \dots, t_n \in D_\Sigma \wedge s(t_1, \dots, t_n) \in E\}$$

Exemple 5.1.8

Soit $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$

L'ensemble $E = \{P(b), Q(a)\}$ définit l'interprétation de Herbrand H de domaine $D_\Sigma = \{a, b\}$ où :

Exemple 5.1.8

Soit $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$

L'ensemble $E = \{P(b), Q(a)\}$ définit l'interprétation de Herbrand H de domaine $D_\Sigma = \{a, b\}$ où :

- ▶ les constantes a et b ont pour valeur elles-mêmes et
- ▶ $P_H = \{b\}$ et $Q_H = \{a\}$.

Propriété de l'interprétation de Herbrand

Propriété 5.1.7

Soit Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. Dans l'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$:

1. La valeur d'un terme sans variable est **lui-même**

Propriété de l'interprétation de Herbrand

Propriété 5.1.7

Soit Σ une signature et $E \subseteq B_\Sigma$. Dans l'interprétation de Herbrand $H_{\Sigma,E}$:

1. La valeur d'un terme sans variable est **lui-même**
2. L'interprétation est modèle d'une formule atomique fermée (sauf \top et \perp) si et seulement si cette formule est **élément de E**

Formule universelle et modèle de Herbrand

Théorème 5.1.9

Soit Γ un ensemble de formules sans quantificateur sur la signature Σ .

$\forall(\Gamma)$ a un modèle si et seulement si $\forall(\Gamma)$ a un modèle qui est une interprétation de Herbrand de Σ .

Plan

Introduction

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Théorème de Herbrand

Théorème 5.1.10

Soit Γ un ensemble de formules sans quantificateur de signature Σ .

$\forall(\Gamma)$ a un modèle *si et seulement si* tout ensemble fini d'instances fermées sur la signature Σ des formules de Γ a un modèle propositionnel application de la base de Herbrand B_Σ dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

Rappel : la signature comporte au moins une constante et le signe égal n'est pas utilisé.

Idées de la preuve (1/2)

⇒ **Supposons que $\forall(\Gamma)$ a un modèle I .**

Les instances des formules de Γ sont conséquences de $\forall(\Gamma)$
donc ont pour modèle I .

Ce modèle I peut être vu comme un modèle propositionnel ν de
domaine B_Σ , la base de Herbrand de la signature Σ , où pour tout
 $A \in B_\Sigma$, $\nu(A) = [A]_I$.

Donc ν est modèle propositionnel de tout ensemble d'instances
des formules de Γ .

Idées de la preuve (2/2)

⇐ Supposons que tout ensemble fini d'instances fermées sur la signature Σ des formules de Γ a un modèle propositionnel de domaine B_Σ .

On démontre que l'ensemble de **toutes** les instances fermées sur la signature Σ a alors un modèle propositionnel v de domaine B_Σ .

Ce modèle propositionnel peut être vu comme le modèle de Herbrand de $\forall(\Gamma)$ associé à l'ensemble des éléments de la base de Herbrand dont v est modèle.

Variante du théorème de Herbrand

Corollaire 5.1.11

Soit Γ un ensemble de formules sans quantificateur de signature Σ .

$\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable *si et seulement s'il existe*
un ensemble fini insatisfaisable d'instances fermées sur la signature Σ
des formules de Γ

Preuve.

Le corollaire est obtenu en remplaçant chaque côté de l'équivalence du théorème de Herbrand par sa négation. \square

Procédure de **semi-décision** : insatisfaisabilité de $\forall(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble **fini** de formules sans quantificateur.

Énumérer l'ensemble des instances fermées des formules de Γ sur la signature Σ et arrêter dès que :

Procédure de **semi-décision** : insatisfaisabilité de $\forall(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble **fini** de formules sans quantificateur.

Énumérer l'ensemble des instances fermées des formules de Γ sur la signature Σ et arrêter dès que :

- ▶ (1) un ensemble est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Procédure de **semi-décision** : insatisfaisabilité de $\forall(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble **fini** de formules sans quantificateur.

Énumérer l'ensemble des instances fermées des formules de Γ sur la signature Σ et arrêter dès que :

- ▶ (1) un ensemble est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.
- ▶ (2) terminaison sans contradiction le, donc le domaine de Herbrand ne comprend que des constantes, donc $\forall(\Gamma)$ est satisfaisable, on a un modèle.

Procédure de **semi-décision** : insatisfaisabilité de $\forall(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble **fini** de formules sans quantificateur.

Énumérer l'ensemble des instances fermées des formules de Γ sur la signature Σ et arrêter dès que :

- ▶ (1) un ensemble est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.
- ▶ (2) terminaison sans contradiction le, donc le domaine de Herbrand ne comprend que des constantes, donc $\forall(\Gamma)$ est satisfaisable, on a un modèle.
- ▶ (3) on est « fatigué » ! donc on ne peut pas conclure : le corollaire nous dit que si $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable, et si l'on avait été plus courageux, on aurait obtenu une contradiction !

Exemple 5.1.12 (1/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), Q(x), \neg P(a) \vee \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

Exemple 5.1.12 (1/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), Q(x), \neg P(a) \vee \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

$$D_{\Sigma} = \{a, b\}.$$

Exemple 5.1.12 (1/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), Q(x), \neg P(a) \vee \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

$$D_{\Sigma} = \{a, b\}.$$

L'ensemble $\{P(a), Q(b), \neg P(a) \vee \neg Q(b)\}$ d'instances sur le domaine de Herbrand est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Exemple 5.1.12 (2/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

Exemple 5.1.12 (2/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ et $\Sigma = \{a, b, P^{r1}, Q^{r1}\}$.

L'ensemble de **toutes** les instances sur le domaine de Herbrand $\{P(a) \vee Q(a), P(b) \vee Q(b), \neg P(a), \neg Q(b)\}$ a un modèle propositionnel caractérisé par $E = \{P(b), Q(a)\}$.

Donc l'interprétation de Herbrand associée à E est modèle de $\forall(\Gamma)$.

Exemple 5.1.12 (3/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), \neg P(f(x))\}$ et $\Sigma = \{a, f^{f1}, P^{f1}\}$.

Exemple 5.1.12 (3/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), \neg P(f(x))\}$ et $\Sigma = \{a, f^{f1}, P^{f1}\}$.

$$D_{\Sigma} = \{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemple 5.1.12 (3/5)

Soit $\Gamma = \{P(x), \neg P(f(x))\}$ et $\Sigma = \{a, f^{f^1}, P^{f^1}\}$.

$$D_\Sigma = \{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble $\{P(f(a)), \neg P(f(a))\}$ d'instances sur le domaine de Herbrand est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Exemple 5.1.12 (4/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee \neg P(f(x)), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$ et $\Sigma = \{a, f^{f1}, P^{r1}\}$.

Exemple 5.1.12 (4/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee \neg P(f(x)), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$ et $\Sigma = \{a, f^{f1}, P^{r1}\}$.

L'ensemble

$\{P(a) \vee \neg P(f(a)), P(f(a)) \vee \neg P(f(f(a))), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$

d'instances sur le domaine de Herbrand est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Exemple 5.1.12 (4/5)

Soit $\Gamma = \{P(x) \vee \neg P(f(x)), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$ et $\Sigma = \{a, f^{f1}, P^{r1}\}$.

L'ensemble

$\{P(a) \vee \neg P(f(a)), P(f(a)) \vee \neg P(f(f(a))), \neg P(a), P(f(f(a)))\}$

d'instances sur le domaine de Herbrand est insatisfaisable, donc $\forall(\Gamma)$ est insatisfaisable.

Remarque : observez qu'il a fallu prendre 2 instances de la première formule de Γ pour obtenir une contradiction.

Exemple 5.1.12 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et
 $\Sigma = \{a, s^{f1}, R^{r2}\}$.

Exemple 5.1.12 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et
 $\Sigma = \{a, s^{f1}, R^{r2}\}$.

$D_\Sigma = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ce domaine est infini.

Exemple 5.1.12 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et $\Sigma = \{a, s^{f1}, R^{r2}\}$.

$D_\Sigma = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ce domaine est infini.

$\forall(\Gamma)$ a un modèle infini : l'interprétation I de domaine \mathbb{N} avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_I(n) = n + 1$ et $R_I = \{(n, p) \mid n < p\}$, en bref $R(x, y) = x < y$.

Exemple 5.1.12 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et $\Sigma = \{a, s^{f1}, R^{r2}\}$.

$D_\Sigma = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ce domaine est infini.

$\forall(\Gamma)$ a un modèle infini : l'interprétation I de domaine \mathbb{N} avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_I(n) = n + 1$ et $R_I = \{(n, p) \mid n < p\}$, en bref $R(x, y) = x < y$.

$\forall(\Gamma)$ n'a aucun modèle fini, autrement dit il est inutile de chercher des modèles finis avec les méthodes du chapitre précédent.

Exemple 5.1.12 (5/5)

Soit $\Gamma = \{R(x, s(x)), R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z), \neg R(x, x)\}$ et $\Sigma = \{a, s^{f1}, R^{r2}\}$.

$D_\Sigma = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ce domaine est infini.

$\forall(\Gamma)$ a un modèle infini : l'interprétation I de domaine \mathbb{N} avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_I(n) = n + 1$ et $R_I = \{(n, p) \mid n < p\}$, en bref $R(x, y) = x < y$.

$\forall(\Gamma)$ n'a aucun modèle fini, autrement dit il est inutile de chercher des modèles finis avec les méthodes du chapitre précédent.

Puisque $\forall(\Gamma)$ a un modèle, on est dans une situation, où la procédure évoquée précédemment ne pourra jamais donner de réponses, aussi longtemps que l'on poursuive l'énumération des instances des formules de Γ .

Plan

Introduction

Interprétation de Herbrand

Théorème de Herbrand

Conclusion

Aujourd'hui



- ▶ Base, modèle et théorème de Herbrand
- ▶ Algorithme semi-décidable
- ▶ Application

Prochaine fois



- ▶ Unification
- ▶ Skolémisation
- ▶ Résolution au premier ordre

Conclusion

Merci de votre attention.

Questions ?