

Exercice : Révision des définitions sur les langages

Soit a un symbole, L, L_1, L_2 des langages et Σ un alphabet.

Q1. Complétez

- L'élément neutre de la concaténation de mot est ...
- Σ^* est l'ensemble des mots finis formés de 0 ou plus de symboles de l'alphabet Σ . En particulier, le mot .. de longueur 0 Σ^* et l'ensemble des mots de longueur 1 Σ^* .
- $L_1 \cdot L_2 = \{\omega_1.\omega_2 \mid \dots \wedge \dots\}$
- Si l'alphabet Σ est vide, alors $\Sigma^* = \dots$
- $L \cdot \{\} = \dots$
- $\emptyset \cdot L = \dots$
- $\{a\} \cdot \{\}^* = \dots = \dots$
- $\emptyset^* \cdot L = \dots$
- $\emptyset^* \cdot \emptyset = \dots$
- Σ^+ est l'ensemble des mots de Σ^* de longueur ≥ 1 , c'est-à-dire $\Sigma^+ \stackrel{def}{=} \{\omega \in \dots \mid \dots\}$
 $\Sigma^+ = \dots \cdot \dots = \dots \cdot \dots$
 $\Sigma^+ = \dots \setminus \dots$
- L un langage sur l'alphabet Σ signifie $L \dots \Sigma^*$.

Q2. Rédigez un raisonnement

Donnez des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir $\{a\} \cdot \Sigma^* \subseteq \Sigma^+$

Indication Considérez les cas $\Sigma = \emptyset$, $\Sigma \neq \emptyset$, $a \in \Sigma$ et $a \notin \Sigma$.

Solution (exemple de rédaction)

- Dans le cas $\Sigma = \emptyset$, forcément $\Sigma^* = \dots$ et $\Sigma^+ = \dots \cdot \Sigma^* = \dots = \dots$ donc $\{a\} \cdot \Sigma^* = \{a\} \cdot \dots = \dots$, et donc l'inclusion est
- Dans le cas $\Sigma \neq \emptyset$, distinguons le cas $a \in \Sigma$ et le cas $a \notin \Sigma$
 - si $a \in \Sigma$ alors si on ajoute la lettre a devant un mot de Σ^* on obtient un mot de donc l'inclusion est
 - si $a \notin \Sigma$, alors les mots du langage $\{a\} \cdot \Sigma^*$, c'est-à-dire les mots par a ne sont pas des mots de et donc l'inclusion est

Conclusion : l'inclusion est vraie si et seulement si

Q3. Rédigez un raisonnement

Même question avec $\Sigma^+ \subseteq \{a\} \cdot \Sigma^*$

Solution (exemple de rédaction)

- Dans le cas $\Sigma = \emptyset$, $\Sigma^+ = \dots \subseteq \dots = \{a\} \cdot \Sigma^*$ et donc l'inclusion est
- Dans le cas $\Sigma \neq \emptyset$,

L'inclusion est vraie si et seulement si mot de est un mot de,
c'est-à-dire si les mots de sont tous des mots

Il faut donc nécessairement que $\Sigma = \dots\dots\dots$

En effet, supposons que l'alphabet Σ contienne une autre lettre, par exemple b , alors le langage
..... contient le mot qui On obtient
une contradiction ; ce qui confirme que la seule possibilité pour que l'inclusion soit vraie c'est que
 Σ contienne la lettre a .

Q4. Rédigez un raisonnement En exploitant les résultats des questions b et c, donnez les conditions
sur Σ nécessaires et suffisantes pour avoir $\Sigma^+ = \{a\} \cdot \Sigma^*$.

Q5. Est-il vrai que $\Sigma^* \cdot \Sigma^* \subseteq \Sigma^*$?

Solution (exemple de rédaction) Par définition, Σ^* contient tous les mots construits par
..... d'un nombre de
de Σ

Considérons deux mots ω et ω' de Σ^* et concaténons les.

$\omega = l_1 \dots l_n$ pour un certain n et des symboles $l_i \in \Sigma$

$\omega' = l'_1 \dots l'_p$ pour un certain p et des symboles $l'_i \in \Sigma$

donc $\omega\omega' = \dots\dots\dots$ est un mot formé de la concaténation de
symboles de Σ donc $\omega\omega' \dots\dots\dots$