Exercice : Révision des définitions sur les langages

Soit a un symbole, L, L_1, L_2 des langages et Σ un alphabet.

Q1. Complétez

- L'élément neutre de la concaténation de mot est ...
- Σ^* est l'ensemble des mots finis formés de 0 ou plus de symboles de l'alphabet Σ. En particulier, le mot $\boxed{\epsilon}$ de longueur 0 $\boxed{\text{appartient à}}$ Σ^* et
  l'ensemble $\boxed{\Sigma}$ des mots de longueur 1 $\boxed{\text{est inclus dans}}$ Σ^*.
- $L_1 \cdot L_2 = \{\omega_1.\omega_2 \mid \boxed{\omega_1 \in L_1} \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
- Si l'alphabet Σ est vide, alors $\Sigma^* = \boxed{\{\epsilon\}}$.
- $L \cdot \{\} = \boxed{\{\}}$
- $\emptyset \cdot L = \boxed{\emptyset}$
- $\{a\} \cdot \{\}^* = \boxed{\{a\} \cdot \{\epsilon\}} = \ldots\ldots\ldots$
- $\emptyset^* \cdot L = \boxed{L}$
- $\emptyset^* \cdot \emptyset = \boxed{\emptyset}$
- Σ^+ est l'ensemble des mots de Σ^* de longueur ≥ 1, c'est-à-dire $\Sigma^+ \stackrel{def}{=} \{\omega \in \boxed{\Sigma^*} \mid \boxed{|\omega| \geq 1}\}$

  $\Sigma^+ = \ldots\ldots \cdot \boxed{\Sigma^*} = \boxed{\Sigma^*} \cdot \ldots\ldots$

  $\Sigma^+ = \ldots\ldots\ldots \setminus \boxed{\{\epsilon\}}$
- L un langage sur l'alphabet Σ signifie $L \boxed{\subseteq} \Sigma^*$.

Q2. Rédigez un raisonnement

Donnez des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir $\{a\}\cdot\Sigma^* \subseteq \Sigma^+$

Indication Considérez les cas $\Sigma = \emptyset$, $\Sigma \neq \emptyset$, $a \in \Sigma$ et $a \notin \Sigma$.

Solution (exemple de rédaction)

- *Dans le cas $\Sigma = \emptyset$, forcément $\Sigma^* = \ldots\ldots\ldots$ et $\Sigma^+ = \ldots\ldots \cdot \Sigma^* = \ldots \cdot \ldots\ldots\ldots = \ldots$ donc*

  $\{a\} \cdot \Sigma^* = \{a\} \cdot \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$, et donc l'inclusion est ....
- *Dans le cas $\Sigma \neq \emptyset$, distinguons le cas $a \in \Sigma$ et le cas $a \notin \Sigma$*
  - *si $a \in \Sigma$ alors si on ajoute la lettre a devant un mot de Σ^* on obtient un mot de .... donc l'inclusion est ....*
  - *si $a \notin \Sigma$, alors les mots du langage $\{a\}\cdot\Sigma^*$, c'est-à-dire les mots .... par a ne sont pas des mots de .... et donc l'inclusion est ....*

Conclusion : l'inclusion est vraie si et seulement si ....

Q3. Rédigez un raisonnement

Même question avec $\Sigma^+ \subseteq \{a\} \cdot \Sigma^*$

Solution (exemple de rédaction)

- *Dans le cas $\Sigma = \emptyset$, $\Sigma^+ = \ldots \subseteq \ldots\ldots\ldots = \{a\} \cdot \Sigma^*$ et donc l'inclustion est ....*
- *Dans le cas $\Sigma \neq \emptyset$,*

  L'inclusion est vraie si et seulement si .... mot de .... est un mot de ....,

  c'est-à-dire si les mots de .... sont tous des mots ....

  Il faut donc nécessairement que $\Sigma = \ldots\ldots\ldots$

En effet, *supposons que l'alphabet* Σ *contienne une autre lettre, par exemple* b, *alors le langage* .... *contient le mot* ...... *qui* .... *On obtient une contradiction ; ce qui confirme que la seule possibilité pour que l'inclusion soit vraie c'est que* Σ *contienne* .... *la lettre* a.

Q4. Rédigez un raisonnement En exploitant les résultats des questions b et c, donnez les conditions sur Σ nécessaires et suffisantes pour avoir $\Sigma^+ = \{a\} \cdot \Sigma^*$.

Q5. Est-il vrai que $\Sigma^* \cdot \Sigma^* \subseteq \Sigma^*$?

Solution (exemple de rédaction) *Par définition,* Σ^* *contient tous les mots construits par* .... *d'un nombre* .... *de* .... *de* Σ

Considérons deux mots ω *et* ω' *de* Σ^* *et concaténons les.*

$\omega = l_1 \dots l_n$ *pour un certain* n *et des symboles* $l_i \in \Sigma$

$\omega' = l'_1 \dots l'_p$ *pour un certain* p *et des symboles* $l'_i \in \Sigma$

donc $\omega\omega' =$ .... *est un mot formé de la concaténation de* .... *symboles de* Σ *donc* $\omega\omega'$ ....