Exercice : Autant de a que de b est un langage irrégulier

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$

Q1. Montrez que le langage $L^= = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$ est irrégulier où L est le langage des mots qui contiennent autant de a que de b.

Correction *L'adversaire choisit n on doit choisir $\omega \in L$ i.e.. $|\omega|_a = |\omega|_b$ tel que $|\omega| \geq n$.*
On considère le mot $\omega = a^n.b^n = \underbrace{a.\ldots.a}_{n}.\underbrace{b.\ldots.b}_{n}$. On a bien $|\omega| = 2n \geq n$.

L'adversaire choisit ensuite une décomposition de ω en xyz avec $|x.y| \leq n$ donc x et y ne contiennent que des a ainsi on peut écrire $x = a^X$, $y = a^y$ et $z = a^{Z_1}.b^n$ avec $Y > 0$ puisque l'adversaire doit choisir $y \neq \epsilon$.

On obtient une contradiction en prenant $k = 2$: Considérons le mot $m \stackrel{def}{=} x.y^2.z = a^X.a^{2y}.a^{z_1}.b^n$ et

$$|m|_a = X + 2Y + Z_1 = \underbrace{X + Y + Z_1}_{n} + Y = n + Y \quad \text{et} \quad |m|_b = n$$

alors $\underbrace{|m_a|}_{n+Y} \neq \underbrace{|m|_b}_{n}$ puisque $Y > 0$

Conclusion : *Le mot m n'appartient pas à L, donc le langage L ne satisfait pas le critère de régularité ; il est donc irrégulier.*

Q2. Déduire de la question précédente au moyen d'une preuve par contradiction que les langages

$$L^< = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega|_a < |\omega|_b\} \quad \text{et} \quad L^> = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega|_a > |\omega|_b\} \quad \text{sont irréguliers.}$$

Correction

On remarque que $L^< \cup L^> = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\} = \overline{L^=}$
Puique le complémentaire d'un langage irrégulier est un langage irrégulier, L'union de langages $L^< \cup L^>$ est donc irrégulier.
Supposons maintenant que $L^<$ et $L^>$ sont réguliers, c'est-à-dire reconnus par des automates $A^<$ et $A^>$, alors $L^< \cup L^>$ serait régulier puiqu'on pourrait construire l'automate $A^< + A^>$. On obtient une contradiction puisqu'on vient de montrer que $L^< \cup L^>$ est irrégulier.
Conclusion de la première partie : *On a supposé que <u>les deux langages</u> $L^<$ et $L^>$ sont <u>réguliers</u> et obtenu une contradiction donc <u>au moins un</u> des 2 langages $L^<$ et $L^>$ est <u>irrégulier</u>.*

On va en fait montrer qu'ils sont tous les deux irréguliers en montrant qu'ils sont forcément de même nature.
Preuve : *Remarquons qu'on peut passer de $L^<$ à $L^>$ (et vice versa) par le morphisme $m : a \mapsto b, b \mapsto a$.*

(1) $m(L^<) = L^>$
(2) $L^< = m(L^<)$

On applique ensuite le résultat suivant : $\boxed{m(L) \text{ irrégulier} \Longrightarrow L \text{ irrégulier}}$
Si $L^<$ est irrégulier alors d'après (2) $L^<$ est irrégulier. Si c'est $L^>$ qui est irrégulier alors d'après (1) $L^>$ est aussi irrégulier.

Conclusion : *On a montré que l'un des langages $L^<, L^>$ était irrégulier et que si l'un était irrégulier, l'autre l'était aussi. Donc les deux langages $L^<$ et $L^>$ sont irréguliers.* □