Exercice 1 – Somme des carrés des N premiers entiers pairs

PROGRAMME

```
x:=0 ; k:= 0 ; i:=0 ;
while(i < N){
  i:= i + 1 ;
  k:= k + 2 ;
  x:= x + k * k  ;
}
```

Q1. (1 pt) Dessinez l'automate correspondant au programme précédent.

$$q_0 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_1$$

$$q_1 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots} q_s$$

$$q_1 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots} q_2$$

$$q_2 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_3$$

$$q_3 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_4$$

$$q_4 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_1$$

Q2. (1 pt) Faîtes quelques exécutions pour trouver l'égalité qui relie les variables `k` et `i`.

Q3. (8 pt) Montrez par la technique de Floyd-Dijkstra-Hoare que l'état de sortie du programme précédent vérifie la propriété $x = \frac{2N(N+1)(2N+1)}{3}$

SOLUTION

$$\psi_s \stackrel{def}{=} x = \frac{2N(N+1)(2N+1)}{3}$$
$$\psi_1 \stackrel{def}{=} i \le N \ \wedge\ x = \frac{2i(i+1)(2i+1)}{3} \ \wedge\ k = 2i$$
$$\psi_4 \stackrel{def}{=} \psi_1[x \leftarrow x + k^2] \equiv i \le N \ \wedge\ x + k^2 = \frac{2i(i+1)(2i+1)}{3} \ \wedge\ k = 2i$$
$$\psi_3 \stackrel{def}{=} \psi_4[k \leftarrow k + 2] \equiv i \le N \ \wedge\ x + (k+2)^2 = \frac{2i(i+1)(2i+1)}{3} \ \wedge\ k + 2 = 2i$$
$$\psi_2 \stackrel{def}{=} \psi_3[i \leftarrow i + 1] \equiv i + 1 \le N \ \wedge\ x + (k+2)^2 = \frac{2(i+1)((i+1)+1)(2(i+1)+1)}{3} \ \wedge\ k + 2 = 2(i+1)$$
$$\psi_0 \stackrel{def}{=} \psi_1[x \leftarrow 0; k \leftarrow 0; i \leftarrow 0] \equiv 0 \le N \ \wedge\ 0 = \frac{2(0)((0)+1)(2(0)+1)}{3} \ \wedge\ 2 = 2 \times 0 \equiv 0 \le N$$

Vérification des invariants :

$$\overbrace{i \leq N \ \wedge \ \underbrace{x = \frac{2i(i+1)(2i+1)}{3}}_{A} \ \wedge \ \underbrace{k = 2i}_{B}}^{\psi_1} \ \wedge \ \overbrace{i < N}^{test}$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$\overbrace{\underbrace{i+1 \leq N}_{test} \ \wedge \ \underbrace{x + (k+2)^2 = \frac{2(i+1)((i+1)+1)(2(i+1)+1)}{3}}_{d'apres\ A \ \wedge \ B} \ \wedge \ \underbrace{k+2 = 2(i+1)}_{B}}^{\psi_2}$$

Q4. (1 pt) En déduire les conditions intiales du programme qui garantissent la propriété de correction à l'état de sortie.

Exercice 2 – Somme des carrés des K premiers entiers impairs

PROGRAMME

```
r:=0 ; u:= 1 ; j:=0 ;
while(j < K){
  r:= r + u * u  ;
  j:= j + 1 ;
  u:= u + 2 ;
}
```

Q5. (1 pt) Dessinez l'automate correspondant au programme précédent.

$$q_0 \xrightarrow{\text{...}} q_1$$

$$q_1 \xrightarrow{\text{..............}} q_s$$

$$q_1 \xrightarrow{\text{..............}} q_2$$

$$q_2 \xrightarrow{\text{................................}} q_3$$

$$q_3 \xrightarrow{\text{.............................}} q_4$$

$$q_4 \xrightarrow{\text{..............................}} q_1$$

Q6. (1 pt) Faîtes quelques exécutions pour trouver l'égalité qui relie les variables `u` et `j`.

Q7. (8 pt) Montrez par la technique de Floyd-Dijkstra-Hoare que l'état de sortie du programme précédent vérifie la propriété $r = \frac{K(2K-1)(2K+1)}{3}$

SOLUTION

$\psi_s \stackrel{def}{=} r = \frac{K(2K-1)(2K+1)}{3}$

$\psi_1 \stackrel{def}{=} j \leq K \;\wedge\; r = \frac{j(2j-1)(2j+1)}{3} \;\wedge\; u = 2j+1$

$\psi_4 \stackrel{def}{=} \psi_1[u \leftarrow u+2] \equiv j \leq K \;\wedge\; r = \frac{j(2j-1)(2j+1)}{3} \;\wedge\; u+2 = 2j+1$

$\psi_3 \stackrel{def}{=} \psi_4[j \leftarrow j+1] \equiv j+1 \leq K \;\wedge\; r = \frac{j+1(2j+1-1)(2j+1+1)}{3} \;\wedge\; u+2 = 2(j+1)+1$

$\psi_2 \stackrel{def}{=} \psi_3[r \leftarrow r+u^2] \equiv j+1 \leq K \;\wedge\; r+u^2 = \frac{j+1(2j+1-1)(2j+1+1)}{3} \;\wedge\; u = 2j+1$

$\psi_0 \stackrel{def}{=} \psi_1[r \leftarrow 0; u \leftarrow 1; j \leftarrow 0] \equiv 0 \leq K \;\wedge\; 0 = \frac{(0)(2(0)-1)(2(0)+1)}{3} \;\wedge\; 1 = 2 \times 0 + 1 \equiv 0 \leq K$

Vérification des invariants :

$$\overbrace{j \leq K \ \wedge \ \underbrace{r = \frac{j(2j-1)(2j+1)}{3}}_{A} \ \wedge \ \underbrace{u = 2j+1}_{B}}^{\psi_1} \ \wedge \ \overbrace{j < K}^{test}$$

$$\stackrel{?}{\Longrightarrow}$$

$$\overbrace{\underbrace{j+1 \leq K}_{test} \ \wedge \ \underbrace{r + u^2 = \frac{j+1(2j+1-1)(2j+1+1)}{3}}_{d'apres \ A \ \wedge \ B} \ \wedge \ \underbrace{u = 2j+1}_{B}}^{\psi_2}$$

Q8. (1 pt) En déduire les conditions intiales du programme qui garantissent la propriété de correction à l'état de sortie.