Exercice 1 – Calcul des termes de la suite de Fibonacci – version avec seulement deux variables (9 pt)

```
i:=N-1 ; x:=1; y:=1 ;
while(i<>0){ y:=y+x ; x:=y-x ; i:=i-1; }
```

On prétend qu'à la sortie du programme le résultat y satisfait la propriété $y = fib(N)$ où

$$\begin{cases} fib(0) = 1 \\ fib(1) = 1 \\ fib(n+1) = fib(n) + fib(n-1) \end{cases}$$

Q1. (1 pt) Donnez les transitions de l'automate correspondant au programme ci-dessus (q_0 représente le point d'entrée et q_s celui de sortie de l'automate).

$$q_1 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots} q_s$$

$$q_0 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} q_1$$

$$q_1 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots} q_2 \quad q_2 \xrightarrow{..\ :=\ \dots\dots\dots\dots} q_3 \quad q_3 \xrightarrow{\dots\ :=\ \dots\dots\dots\dots} q_4 \quad q_4 \xrightarrow{.\ :=\ \dots\dots\dots\dots} q_1$$

Q2. (4 pt) **Preuve de correction partielle** Rédigez la preuve (en suivant la méthode de Floyd-Dijsktra-Hoare) qu'à la sortie du programme $y = fib(N)$. La qualité et la précision de la rédaction compte pour une grande part dans la note. Vous prendrez pour invariant en q_1 une propriété de la forme :

$$y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \wedge\ \dots\dots = fib(\dots\dots\dots\dots - k)$$

où k est une constante que vous devrez déterminer

SOLUTION

1. *Transition* $q_1 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots} q_s$

$$\psi_1 \ \wedge\ i = 0 \Longrightarrow \overbrace{y = fib(N)}^{\psi_s}$$

On choisit $\psi_1 \stackrel{def}{=} y = fib(N-i) \ \wedge\ x = fib(N-i-k)$
Lorsque $i = 0$, ψ_1 *nous donne* $y = fib(N)$ *(et d'autres propriétés qui ne sont pas utiles pour* ψ_s*).*

2. *Transition* $q_4 \xrightarrow{i:=i-1} q_1$

$$\begin{aligned} \psi_4 &\stackrel{def}{=} \psi_1[i := i-1] \\ &\stackrel{def}{=} y = fib(N-(i-1)) \ \wedge\ x = fib(N-(i-1)-k) \\ &\equiv y = fib(\,(N-i)\,+1) \ \wedge\ x = fib(\,(N-i)\,+1-k) \end{aligned}$$

3. *Transition* $q_3 \xrightarrow{x:=y-x} q_4$

$$
\begin{aligned}
\psi_3 &\stackrel{def}{=} \psi_4[x \leftarrow y - x] \\
&\stackrel{def}{=} y = fib(\,(N-i)\,+1) \;\wedge\; y - x = fib(\,(N-i)\,+1-k)
\end{aligned}
$$

4. Transition $q_2 \xrightarrow{y:=x+y} q_3$

$$
\begin{aligned}
\psi_2 &\stackrel{def}{=} \psi_3[y \leftarrow x + y] \\
&\stackrel{def}{=} x + y = fib(\,(N-i)\,+1) \;\wedge\; (x+y) - x = fib(\,(N-i)\,+1-k) \\
&\equiv x + y = fib(\,(N-i)\,+1) \;\wedge\; y = fib(\,(N-i)\,+1-k)
\end{aligned}
$$

5. Transition $q_1 \xrightarrow{i \neq 0} q_2$ VÉRIFICATION DES INVARIANTS CHOISIS *Il s'agit de vérifier que limplication suivante est valide.*

$$
\overbrace{y = fib(N-i) \;\wedge\; x = fib(\,(N-i)\,-k)}^{\psi_1} \;\wedge\; \overbrace{i \neq N}^{garde}
$$

$$
\stackrel{?}{\Longrightarrow} \overbrace{\underbrace{x + y \stackrel{?}{=} fib(\,(N-i)\,+1)}_{(**)} \;\wedge\; \underbrace{y \stackrel{?}{=} fib(\,(N-i)\,+1-k)}_{(*)}}^{\psi_2}
$$

$(*)$ *Si on choisit $k = 1$ alors $(*)$ devient $y \stackrel{?}{=} fib(\,(N-i)$ et c'est alors le premier terme de la prémisse de l'implication, donc cette partie de la conclusion de l'implication est trivialement démontrée.*

$(**)$ *En prenant $k = 1$ on a alors en prémisse de l'implication $y = fib(N-i)$ et $x = fib((N-i)-1)$, on peut remplacer x et y par leurs valeurs dans le terme $(**)$ qui devient alors*

$$
fib(N-i) + fib((N-i)-1) \stackrel{?}{=} fib((N-i)+1)
$$

Cette égalité valide d'après la définition du $n^{ème}$ terme de la suite de Fibonacci avec $n = N - i$

Q3. (2 pt) Récapitulez les invariants

$\psi_1 \stackrel{def}{=}$

$\psi_2 \stackrel{def}{=}$

$\psi 3 \stackrel{def}{=}$

$\psi 4 \stackrel{def}{=}$

Q4. (1 pt) En déduire les conditions d'utilisation du programme. Détaillez vos étapes de calcul et de simplification.

SOLUTION

Transition $q_0 \xrightarrow{i:=N-1;x:=1;y:=1} q_1$

$$
\begin{aligned}
\psi_0 &\stackrel{def}{=} \psi_1[i \leftarrow N-1; x \leftarrow 1; y \leftarrow 1] \\
&\equiv \big(y = fib(N-i) \;\wedge\; x = fib(N-i-1)\big)\,[i \leftarrow N-1; x \leftarrow 1; y \leftarrow 1] \\
&\equiv \big(1 = fib(N - \,(N-1)\,) \;\wedge\; 1 = fib(N - \,(N-1)\,-1)\big) \\
&\equiv \underbrace{1 = fib(1)}_{vrai} \;\wedge\; \underbrace{1 = fib(0)}_{vrai} \\
&\equiv \textit{vrai par définition de la suite de Fibonacci}
\end{aligned}
$$

Q5. (1 pt) Comment se comporte le programme pour $N = 0$? Expliquez pourquoi la condition $N > 0$ n'apparaît pas comme condition d'utilisation du programme ?