



DS preuve de correction de programme A&G, INFO 3, Polytech'Grenoble

<input type="checkbox"/> 0								
<input type="checkbox"/> 1								
<input type="checkbox"/> 2								
<input type="checkbox"/> 3								
<input type="checkbox"/> 4								
<input type="checkbox"/> 5								
<input type="checkbox"/> 6								
<input type="checkbox"/> 7								
<input type="checkbox"/> 8								
<input type="checkbox"/> 9								

← N'oubliez pas d'indiquer votre numéro d'étudiant en grisant les cases du tableau.

Indiquez aussi NOM, Prénom et numéro d'étudiant au format standard

.....

.....

.....

Consignes

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres qui ne communiquent pas.
- Le sujet comporte 39 questions réparties en 2 parties indépendantes.
- Grisez les cases des bonnes réponses. Un case mal grisée est considérée comme . **Utilisez une encre foncée** ; pas de crayon à papier ou alors repassez vos réponses à l'encre avant de rendre votre copie.
- Les questions ♣ peuvent avoir *plusieurs propositions correctes*.
- Une mauvaise réponse fait perdre des points. L'absence de réponse vaut 0 point.

1 Égalité de tableaux avec sentinelle

Question 1 ♣ Cochez les éléments qui appartiennent au tableau *A* de l'exemple.

<input type="checkbox"/>	-1	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	7
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	5
<input type="checkbox"/>	aucune des réponses proposées n'est correcte						

Question 2 ♣ Cochez les cas où les tableaux à sentinelle *A* et *B* sont égaux

- $A[0] = -1, A[1] = -1, B[0] = -1, B[1] = -1$
- $A[0] = 0, A[1] = 1, B[0] = 0, B[1] = 1$
- $A[0] = -1, B[0] = -1$
- $A[0] = 0, A[1] = 1, B[0] = -1, B[1] = 1$
- $A[0] = -1, A[1] = 1, B[0] = -1, B[1] = 0$
- $A[0] = 0, A[1] = -1, B[0] = 0, B[1] = -1$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

1.1 Automate

Question 3 Quel est l'état de sortie associé à l'instruction `return true`;

q_5 q_2 q_3 q_4

Question 4 ♣ On vous conseille l'ordre suivant pour choisir les invariants $\psi_4; \psi_2; \psi_1; \psi_3; \psi_5; \psi_0$. En procédant dans cet ordre cochez les transitions qui correspondent à des étapes de vérification:

<input type="checkbox"/>	$q_0 \rightarrow q_1$	<input type="checkbox"/>	$q_3 \rightarrow q_1$
<input type="checkbox"/>	$q_1 \rightarrow q_2$	<input type="checkbox"/>	$q_2 \rightarrow q_4$
<input type="checkbox"/>	$q_1 \rightarrow q_5$	<input type="checkbox"/>	$q_2 \rightarrow q_3$
<input type="checkbox"/>	aucune des réponses proposées n'est correcte		

Question 5 Quel est l'état de sortie associé à l'instruction `return false`;

q_2 q_3 q_5 q_4



Question 6 ♣ Dessinez au brouillon l'automate du programme égalité de tableaux puis cochez les transitions qui NE font PAS partie de l'automate

- $q_0 \xrightarrow{i \leftarrow 0} q_1$
- $q_3 \xrightarrow{i \leftarrow i+1} q_1$
- $q_1 \xrightarrow{A[i] = -1} q_5$
- $q_2 \xrightarrow{A[i] \neq -1} q_3$
- $q_2 \xrightarrow{A[i] = -1} q_4$
- aucune des réponses proposées n'est correcte
- $q_2 \xrightarrow{A[i] \neq B[i]} q_5$
- $q_1 \xrightarrow{A[i] \neq B[i]} q_5$
- $q_3 \xrightarrow{i \leftarrow i+1} q_4$
- $q_1 \xrightarrow{A[i] = B[i]} q_2$

1.2 Invariants

Question 7 ♣ Choisissez deux propriétés associées à l'état q_4 qui expriment la correction du programme en q_4

- $A[i] \neq -1$
- $\forall k \in [0..i], A[k] = B[k]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] \neq -1 \vee B[k] \neq -1$
- $\forall k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] = -1 \wedge B[k] = -1$
- $A[i] = -1$
- $\forall k \in [0..i-1], A[k] = B[k]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 8 ♣ Parmi les propriétés suivantes cochez celles qui sont des invariants de q_1

- $\forall k \in [0..i], A[k] = B[k]$
- $i = 0$
- $\forall k \in [0..i-1], A[k] = B[k]$
- $i \geq 0$
- $i = i + 1$
- $A[i] = B[i]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] = B[k]$
- $\exists k \in [0..i-1], A[k] \neq B[k]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] = -1 \vee B[k] = -1$
- $A[0] = -1 \vee A[0] \neq -1$
- $A[i] \neq -1 \vee B[i] \neq -1$

aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 9 ♣ Choisissez les propriétés associées à l'état q_5 qui expriment la correction du programme en q_5

- $A[i] = -1$
- $\forall k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$
- $A[i] \neq -1$
- $\forall k \in [0..i], A[k] = B[k]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] \neq -1 \vee B[k] \neq -1$
- $\exists k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$
- $\forall k \in [0..i-1], A[k] = B[k]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] = -1 \wedge B[k] = -1$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 10 ♣ Parmi les propriétés suivantes cochez celles qui sont valides lorsqu'on arrive pour la première fois en q_1

- $A[i] \neq -1 \vee B[i] \neq -1$
- $A[0] = -1 \vee A[0] \neq -1$
- $\exists k \in [0..i-1], A[k] \neq B[k]$
- $\forall k \in [0..i-1], A[k] = B[k]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] = -1 \vee B[k] = -1$
- $A[i] = B[i]$
- $i \geq 0$
- $\forall k \in [0..i], A[k] = B[k]$
- $\exists k \in [0..i], A[k] = B[k]$
- $i = i + 1$
- $i = 0$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

1.3 Rédaction de preuve

Question 11 ♣ Cochez les conditions d'utilisation

- $A[0] \neq -1 \wedge B[0] \neq -1$
- $A[-1] = B[-1]$
- $i \geq 0$
- $A[0] \neq -1 \vee B[0] \neq -1$
- $\forall k \in [0..-1], A[k] = B[k]$
- $\{\}$
- $\exists k \in [0..-1], A[k] \neq B[k]$



aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 12 Rédigez avec soin une étape de vérification. réservé au correcteur

$A[i] = -1 \implies \exists k \in [0..i], \wedge \begin{matrix} A[k] = -1 \\ B[k] = -1 \end{matrix}$

$A[i] = -1 \implies A[i] = -1 \vee B[i] = -1$

$A[i] \neq B[i] \implies \exists k \in [0..i], A[k] = B[k]$

$A[i] = -1 \implies \exists k \in [0..i], \vee \begin{matrix} A[k] = -1 \\ B[k] = -1 \end{matrix}$

$A[i] \neq B[i] \implies \exists k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$

$A[i] = -1 \implies \exists k \in [0..i], A[k] = -1$

$A[i] \neq B[i] \implies \forall k \in [0..i - 1], A[k] \neq B[k]$

$A[i] \neq B[i] \implies \forall k \in [0..i - 1], A[k] = B[k]$

aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 14 ♣ Cochez les formulations équivalentes

$\forall k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$
 $\equiv A[0] \neq B[0] \vee \dots \vee A[i] \neq B[i]$

$A[0] \neq B[0] \wedge \forall k \in [0..i - 1], A[k] \neq B[k]$
 $\equiv \forall k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$

$\forall k \in [0..i - 1], A[k] \neq B[k]$
 $\equiv A[0] \neq B[0] \wedge \dots \wedge A[k - 1] \neq B[k - 1]$

$\forall k \in [0..i - 1], A[k] \neq B[k] \wedge A[i] \neq B[i]$
 $\equiv \forall k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$

$\exists k \in [0..i], A[k] = B[k]$
 $\equiv \exists k \in [0..i - 1], A[k] = B[k] \vee A[i] = B[i]$

$\exists k \in [0..i], A[k] = B[k]$
 $\equiv \bigvee_{k \in [0..i]} A[k] = B[k]$

$\exists k \in [0..i], A[k] = B[k]$
 $\equiv A[0] = B[0] \wedge \exists k \in [1..i], A[k] = B[k]$

$\forall k \in [0..i], A[k] \neq B[k]$
 $\equiv \exists k \in [0..i], A[k] = B[k]$

aucune des réponses proposées n'est correcte

2 Algorithme de calcul du pgcd

Question 15 ♣ Parmi les programmes suivants le(s)quel(s) correspondent à l'automate ?

- P6 P2 P3
- P4 P1 P5

aucune des réponses proposées n'est correcte

1.4 Logique

Question 13 ♣ Cochez les implications valides (c'est-à-dire toujours vraies)



2.1 Exécutions

Question 16 ♣ Par quels couples (a,b) passe l'algorithme pour $A = -5$ et $B = 20$?

- (5,5) (-5,5) (-5,25)
 (-5,15) (-5,20) (0,0)
 aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 17 ♣ Par quels couples (a,b) passe l'algorithme pour $A = 41$ et $B = 27$?

- (12,13) (11,10) (41,27)
 (14,13) (1,13) (1,11)
 (0,0) (1,1)
 aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 18 ♣ Par quels couples (a,b) passe l'algorithme pour $A = 18$ et $B = 27$?

- (3,3) (18,27) (6,9)
 (0,0) (9,9)
 aucune des réponses proposées n'est correcte

2.2 Preuve de la propriété (ii) du pgcd

En vous aidant des propriétés 1 à 5 du pgcd, complétez la démonstration de $pgcd(a, b) = pgcd(a, b - a)$ si $a \leq b$.

Question 19 ♣ Notons p le $pgcd(a, b)$ et notons q le $pgcd(a, b - a)$. Pour démontrer que $pgcd(a, b) = pgcd(a, b - a)$ on utilise la propriété 5, il suffit alors de démontrer que

- $p|q$ $p = pgcd(a, b)$ $q|p$
 $p < q$ $q = pgcd(a, b - a)$
 $p = q$
 aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 20 ♣ Par définition de $p = pgcd(a, b)$, p est un diviseur commun à a et à b donc

- $p|b$ $b|p$ $p|a$
 $a|p$
 aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 21 D'après les hypothèses $a \leq b$. Donc $0 \leq b - a$ et on peut déduire de la question précédente que $p|b - a$ grâce à la propriété

- 3 5 1 4
 2

Question 22 ♣ ... et on a forcément $p|pgcd(a, b - a)$ d'après la propriété 2, puisque

- $p|b - a$ $p|b$ $p|a$
 $pgcd(a, b) = pgcd(b, a)$
 aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 23 ♣ On a donc démontré que

- $p|pgcd(a, b)$ $p|pgcd(a, b - a)$
 $p|q$ $q|p$
 $q = pgcd(a, b - a)$ $p = q$
 aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 24 ♣ Par ailleurs, puisque $q = pgcd(a, b - a)$ alors $q|a$ et $q|b - a$ et donc

- $q|pgcd(a, a)$ d'après la propriété 2
 $q|a$ d'après la propriété 3
 $q|b$ d'après la propriété 4
 $q|a + b - a$ d'après la propriété 4
 $q = p$ d'après la propriété 5
 aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 25 ♣ mais alors on peut conclure que $q|pgcd(a, b)$ d'après la propriété 2 puisque

- $q|p$ $b|q$ $q|a$
 $p|q$ $a|q$ $q|b$
 aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 26 Et comme $p = pgcd(a, b)$, on en déduit que $q|p$ et donc $p = q$ d'après la propriété

- 1 2 3 5
 4

Question 27 Ce qui termine la preuve de (ii) et permet de conclure que

- $pgcd(a, b) = pgcd(b, a)$
 $a = pgcd(a, b)$
 $pgcd(a, b) = pgcd(a - b, b)$
 $pgcd(a, b) = pgcd(a, b - a)$
 $a = pgcd(a, a)$



2.3 Preuve de correction partielle

$$\square \psi_3 \equiv \psi_1[b \leftarrow b - a]$$

Question 28 ♣ Dans quel(s) ordre(s) doit-on choisir les invariants ?

- $\psi_s ; \psi_1 ; \psi_3 ; \psi_4 ; \psi_2 ; \psi_0$
- $\psi_s ; \psi_1 ; \psi_0 ; \psi_2 ; \psi_3 ; \psi_4$
- $\psi_s ; \psi_1 ; \psi_2 ; \psi_3 ; \psi_4 ; \psi_0$
- $\psi_0 ; \psi_1 ; \psi_2 ; \psi_3 ; \psi_4 ; \psi_1 ; \psi_s$
- $\psi_s ; \psi_1 ; \psi_4 ; \psi_3 ; \psi_2 ; \psi_0$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 29 La transition $q_3 \rightarrow q_1$ permet de déterminer

- ψ_3
- ψ_1 et ψ_3
- ψ_1

Question 30 ♣ Quelle(s) propriété(s) doit-on prendre pour ψ_s ?

- $a = A$
- $a = \text{pgcd}(A, B)$
- $a = b$
- $A = B$
- $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(A, B)$
- $b = B$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 31 Quelle est l'implication associée à la transition $q_2 \rightarrow q_3$?

- $\psi_3 \wedge a \leq b \implies \psi_2$
- $\psi_3 \implies a \leq b \vee \psi_2$
- $\psi_2 \implies a \leq b \wedge \psi_3$
- $\psi_2 \vee a \leq b \implies \psi_3$
- $\psi_2 \wedge a \leq b \implies \psi_3$

Question 32 Combien y'a-t'il d'étapes de vérification des choix d'invariants dans cette preuve de correction partielle ?

- 2
- 3
- 1
- 0

Question 33 D'après la transition $q_3 \rightarrow q_1$

- $\psi_1 \wedge b = b - a \implies \psi_3$
- $\psi_1 \wedge b \leftarrow b - a \implies \psi_3$
- $\psi_3 \wedge b = b - a \implies \psi_1$
- $\psi_1 \equiv \psi_3[b \leftarrow b - a]$

Question 34 Rédigez avec soin la preuve de l'implication associée à la transition $q_2 \rightarrow q_3$

réservé au correcteur



2.4 Invariants

Question 35 ♣ Cochez les propriétés qui figurent dans l'invariant ψ_3

- $pgcd(a - b, b) = pgcd(a, b - a)$
- $pgcd(a - b, b) = pgcd(A, B)$
- $a = a - b$ $b = b - a$
- $a = b$ $pgcd(a, b - a) = pgcd(A, B)$
- $a > b$ $pgcd(a, b) = pgcd(A, B)$
- $a \leq b$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 36 ♣ Cochez les propriétés qui figurent dans l'invariant ψ_2

- $a > b$ $pgcd(a, b) = pgcd(A, B)$
- $pgcd(a, b - a) = pgcd(A, B)$
- $b = b - a$ $a \leq b$
- $a = a - b$ $a = b$
- $pgcd(a - b, b) = pgcd(A, B)$
- $pgcd(a - b, b) = pgcd(a, b - a)$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

2.5 Conditions d'utilisation

Question 37 ♣ Donnez les conditions d'utilisation auquel on s'attendrait

- $A \neq B$ $A \geq 0$ $A \leq B$
- $B \geq 0$ aucune $A \geq B$
- aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 38 ♣ Indiquez les conditions d'utilisation données par la preuve de correction partielle

- $A \leq B$ $A \geq 0$ $A \neq B$
- $B \geq 0$ $A \geq B$ aucune
- aucune des réponses proposées n'est correcte

Question 39 ♣ Pourquoi n'obtient-on pas toutes les conditions d'utilisation attendues lorsqu'on fait la preuve de correction partielle ? réservé au correcteur

.....

.....

.....

.....