Exercice 2 : Logarithme en base B (10 pt)

On considère le programme suivant où A et B sont deux valeurs entrées au clavier par l'utilisateur.

PROGRAMME

```
y:=A ; p:=0 ;
while(y ≥ B){
 y := y ÷ B ;
 p := p+1 ;
}
```

On prétend que ce programme implémente le calcul du logarithme entier de A en base B, c'est à dire $p = \lfloor \log_B(A) \rfloor$. Autrement dit, on prétend qu'à la sortie du programme, la valeur de p est telle que $B^p \leq A < B^{p+1}$

Q1. Construire l'automate du programme (on nommera les états q_0, q_1, q_2, q_s)

Q2. Faire la preuve de correction partielle du programme par la méthode de Floyd-Dijkstra-Hoare.

Indication : L'invariant en q_1 est de la forme

$$\psi_1 = \begin{cases} \;.. \times B^p \leq A \\ A < (\,..\, + 1) \times B^p \\ 1 \leq \,.. \\ 0 < B \end{cases}$$

Indication : Voici deux résutlats utiles pour la preuve de correction partielle :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(R1) $n < B \Rightarrow (n+1) \leq B$

(R2) $n + 1 \leq (n \div B \; + 1) \times B$

Preuve du résultat (R2): D'après le théorème d'Euclide, tout entier n peut s'écrire

$$n = q \times B + r \text{ avec } r < B$$

où q est le résultat de l'opération $n \div B$ appelée division entière de n par B.

$$\begin{array}{ll} \textit{ainsi} & (n \div B) = q \\ \textit{donc} & (n \div B) \times B = q \times B = n - r \quad \textit{d'après Euclide} \\ \textit{et donc} & (n \div B) \times B + B = n + (B - r) \end{array}$$

Puisque $r < B$ alors $B - r > 0$ et puisque $(B - r) \in \mathbb{N}$ on peut en déduire que $B - r \geq 1$ donc

$$\begin{array}{ll} & (n \div B) \times B + B = n + (B - r) \geq n + 1 \\ \textit{d'où} & (n \div B + 1) \times B \geq n + 1 \end{array}$$

□

Q3. En déduire les conditions d'utilisation du programme.