Exercice : Tour d'exposants d'Ackermann (10 pt)

On considère le programme suivant où N et A sont deux valeurs entrées au clavier par l'utilisateur.

PROGRAMME
```
r:=1 ; y:=N ;
while(y>0){
 r := A^r ;
 y := y-1 ;
}
```

On souhaite montrer qu'à la sortie de ce programme la variable r contient la valeur $A \oslash N$ qui est définie par la suite récurrente :

$$\begin{cases} A \oslash 0 & = & 1 \\ A \oslash (n+1) & = & A^{(A \oslash n)} \end{cases}$$

Autrement dit,

$$A \oslash 1 = A$$
$$A \oslash 2 = A^A$$
$$A \oslash 3 = A^{(A^A)}$$
$$A \oslash 4 = A^{(A^{(A^A)})}$$
$$A \oslash n = A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{A}}}}} \; {}_{n\text{-1 fois}}$$

Remarque Attention à ne pas confondre $A \oslash 4 = A^{(A^{(A^A)})}$ avec $((A^A)^A)^A = (A^{(A\times A)})^A = A^{(A\times A\times A)} = A^{A^3}$ qui est nettement plus petit.

Preuve de correction partielle par la méthode de Floyd-Dijkstra-Hoare

Q1. Construire l'automate du programme (on nommera les états q_0, q_1, q_2, q_s)

Q2. Donnez une propriété ψ_s associée à l'état de sortie de la forme $.. = 0 \;\wedge\; r = A \oslash (N - ..)$ et montrer qu'elle implique que $r = A \oslash N$

Q3. Donnez l'implication qui permet de déterminer l'invariant ψ_1 en q_1 à partir de l'invariant ψ_s et en déduire l'invariant ψ_1

Q4. Rédigez la fin de la preuve de correction partielle du programme

Q5. Donnez les conditions d'utilisation du programme