NOM ..... Prénom ..... Groupe ...

ou NUMÉRO D'ÉTUDIANT .....si l'examen est anonyme

# RICM3 – Automates et Grammaires

**Durée : 1h00, sans documents.**

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 2 exercices indépendants, de même niveau de difficulté.
- Répondez sur votre copie sauf pour les questions avec pointillés
- N'oubliez pas de mettre votre nom ou votre numéro d'étudiant sur le sujet

## Exercice 1 : Le décalage à droite est la multiplication par 2 en binaire

10 *pt*

(30 min)

Pour effectuer la multiplication par 2 en binaire, il suffit de décaler les bits d'un cran vers la droite et d'ajouter un 0 à gauche. Le programme exploite ce principe : il prend en paramètre un nombre binaire $U$ représenté par le tableau $U[0..N]$ et remplit le tableau $D[0..n]$ qui représente le double de $U$.

**Exemple :** Si on donne le tableau $U$ suivant au programme

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U[k]$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... | 0 |

$\simeq 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 = 1 + 4 = 5$

il construit le tableau

| $\ell$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D[\ell]$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | ... | 0 |

$\simeq 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 2 + 8 = 10$

PROGRAMME

```
if (U[N] ≟ 0) then
{ i := N ;
  while(i ≠ 0){
    D[i] := U[i-1] ;
    i := i-1 ;
  }
  D[0]:=0;
}
```

1.5 *pt*

**Q1. Automate** Complétez les transitions de l'automate correspondant au programme

$$q_0 \xrightarrow{\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad} q_1 \xrightarrow{\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad} q_2 \xrightarrow{\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad} q_5 \xrightarrow{D[0]\leftarrow 0} q_s$$

$$q_2 \xrightarrow{\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad} q_3 \xrightarrow{\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad} q_4 \xrightarrow{\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad} q_2$$

6.5 pt

**Q2. Preuve de correction** Montrez par la méthode de Floyd-Dijkstra-Hoare qu'à la sortie du programme la propriété suivante est vérifiée :

$$\psi_s : \quad \left(\sum_{\ell=0}^{\ell=N} D[\ell] \times 2^\ell\right) \stackrel{?}{=} 2 \times \left(\sum_{k=0}^{k=N} U[k] \times 2^k\right)$$

**Indication :**

1. Vous indiquerez toujours la transition considérée et vous prendrez soin de rédiger complétement une transition test et une transition d'affectation.
2. Pour effectuer correctement les affectations en arrière vous aurez besoin de réécrire les $\sum$ sous une forme qui fait apparaître explicitement le terme que vous devez substituer.
   Par exemple,
   $$\sum_{\ell=0}^{\ell=N} D[\ell] \times 2^\ell \stackrel{?}{=} D[0] \times 2^0 + \sum_{\ell=1}^{\ell=N} D[\ell] \times 2^\ell$$
3. Vous prendrez comme invariant en $q_2$ une propriété de la forme
   $$\psi_2 : \quad \left(\sum_{\ell=\ldots+1}^{\ell=N} D[\ell] \times 2^\ell\right) \stackrel{?}{=} 2 \times \left(\sum_{k=\ldots}^{k=N} U[k] \times 2^k\right)$$

2 pt

**Q3. Conditions d'utilisation** En déduire les conditions d'utilisation du programme.

10 pt

## Exercice 2 : Calculs de factorielles (30 min)

On considère la définition de la factorielle sous la forme d'un suite récurrente

$$\begin{cases} (0)! &= 1 \\ (i)! &= i \times (i-1)! \ \textit{pour}\ i \geq 1 \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de montrer que l'automate ci-après calcule les termes de la suite récurrente factorielle jusqu'au rang $N$ et les range dans le tableau $F[0..N]$

$$q_0 \xrightarrow{F[0]\leftarrow 1} q_1 \xrightarrow{i\leftarrow 1} q_2 \xrightarrow{i>N} q_s$$

$$q_2 \xrightarrow{i\leq N} q_3 \xrightarrow{F[i]\leftarrow i\times F[i-1]} q_4 \xrightarrow{i\leftarrow i+1} q_2$$

de sorte qu'à la sortie de l'automate (en $q_s$) la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall k \leq N,\ F[k] = (k)!$$

1.25 pt

**Q4. Programme** Donnez le programme correspondant à l'automate précédent.

1 pt

**Q5. Question de cours** Expliquez ce que signifie qu'une propriété $\psi$ est un invariant d'un état $q$ de l'automate.

5.25 pt

**Q6. Preuve de correction** Montrez par la méthode de Floyd-Dijkstra-Hoare qu'à la sortie de l'automate la propriété suivante est vérifiée :

$$\psi_s : \quad \forall k \leq N,\ F[k] = (k)!$$

**Indication :**

1. Vous indiquerez toujours la transition considérée et vous prendrez soin de rédiger complétement une transition test et une transition d'affectation.
2. Pour $\psi_2$ vous prendrez un invariant de la forme
   $$\psi_2 : \begin{cases} \forall k \leq \ldots - 1,\ F[k] = (k)! \\ \\ \ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$
3. Pour effectuer correctement les affectations en arrière vous penserez à réécrire les propriétés sous une forme qui fait apparaître explicitement le terme que vous devez substituer.

2.5 pt

**Q7. Conditions d'utilisation** En déduire les conditions d'utilisation du programme.