NOM .... Prénom .... Groupe ...
ou NUMÉRO D'ÉTUDIANT ....si l'examen est anonyme

RICM3 – Automates et Grammaires

Durée : 1h30, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 3 exercices indépendants
- Il est noté sur 30
- Répondez sur votre copie sauf pour les questions avec pointillés
- N'oubliez pas de mettre votre nom ou votre numéro d'étudiant sur le sujet
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

$\overline{10\,pt}$

Exercice 1 : Schéma de Horner (30 min)

On considère un tableau `D[0..N]` remplit de $N+1$ digit (appartenant à $\{0,\ldots,9\}$). On peut voir un tableau de digits comme un entier en considérant que le digit de case 0 correspond aux unités, le digit de la case 1 aux dizaines, celui de la case 2 aux centaines et plus généralement le digit de la case i correspond au coefficient de puissance 10^i.

Exemple : le tableau

i	0	1	2	3	4	5	....	$N-1$	N
$D[i]$	5	0	7	3	1	0	...0...	0	0

correspond à l'entier 13705

De manière générale, le tableau

i	0	1	2	3	...	$N-1$	N
$D[i]$	d_0	d_1	d_2	d_3	...	d_{N-1}	d_N

correspond à l'entier

$$d_0 + d_1 \times 10 + d_2 \times 10^2 + d_3 \times 10^3 + \ldots + d_{N-1} \times 10^{N-1} + d_N \times 10^N = \sum_{k=0}^{N} D[k] \times 10^k$$

On prétend que le programme suivant calcule l'entier correspondant au tableau de digits `D[0..N]`, et qu'à la sortie du programme la variable r contient la valeur $\sum_{k=0}^{N} D[k] \times 10^k$.

PROGRAMME

```
i:=N ; r:=0 ;
while(i>0){
 r := 10 * (r + D[i]) ;
 i := i-1 ;
}
r := r +  D[0]
u  := 42 ;
```

$\overline{1\,pt}$

Q1. Donnez l'automate correspondant au programme.

$q_0 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_1$

$q_1 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots} q_4 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_5 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_s$

$q_1 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots} q_2 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_3 \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} q_1$

0.5 pt

Q2. Donnez la propriété ψ_s associée à l'état de sortie q_s du programme.

2 pt

Q3. Déterminez les propriétés (en justifiant votre choix)

$$\psi_5 \stackrel{def}{=}$$

$$\psi_4 \stackrel{def}{=}$$

2 pt

Q4. Choix de l'invariant de boucle

(a) Écrivez l'implication correspondant à la transition $q_1 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} q_4$

(b) Choississez la propriété ψ_1.

Indication :

$$\psi_1 \stackrel{def}{=} r = \frac{\left(\sum_{k=\dots\dots}^{N} D[k] \times 10^k\right)}{\left(10^{\cdot\cdot}\right)} \;\wedge\; \dots\dots$$

(c) Prouvez l'implication.

3.5 pt

Q5. Terminez la preuve de correction partielle du programme.

1 pt

Q6. Donnez les conditions d'utilisations du programme et conclure.

10 pt

Exercice 2 : Calculs de factorielle (30 min)

On considère la définition de la factorielle sous la forme d'un suite récurrente

$$\begin{cases} fac(0) & = & 1 \\ fac(i+1) & = & i \times fac(i) \quad pour\ i+1 > 0 \end{cases}$$

1.5 pt

Q1. Programme Donnez un programme qui calcule la factorielle de N

PROGRAMME

```
r:= ...    ; i:= ...    ;

while( ................   ){

    ...................    ;

    ...................    ;
}
```

0.5 pt

Q2. Automate Donnez les transitions de l'automate correspondant à votre programme.

$$q_0 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} q_1 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} q_s$$

$$q_1 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots} q_2 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} q_3 \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} q_1$$

1 pt

Q3. Question de cours Expliquez ce que signifie qu'une propriété ψ est un invariant de l'état q

0.5 pt

Q4. Propriété de correction Donnez la propriété de correction du programme sous la forme d'un invariant d'état.

5.5 pt

Q5. Preuve de correction partielle Montrez la correction partielle de votre programme à l'aide de la méthode de Floyd-Dijkstra-Hoare.

1 pt

Q6. Conditions d'utilisation En déduire les conditions d'utilisation de votre programme qui garantissent qu'il calcule bien la factorielle de n.

10 pt

Exercice 3 : Calcul des termes de la suite de Fibonacci – version avec seulement deux variables (30 min)

PROGRAMME

```
i:=N-1 ; x:=1; y:=1 ;
while(i<>0){
  y:=y+x ;
  x:=y-x ;
  i:=i-1 ;
}
```

On prétend qu'à la sortie du programme le résultat y satisfait la propriété $y = fib(N)$ où

$$\begin{cases} fib(0) = 1 \\ fib(1) = 1 \\ fib(n+1) = fib(n) + fib(n-1) \end{cases}$$

1 pt

Q1. Donnez les transitions de l'automate correspondant au programme ci-dessus (q_0 représente le point d'entrée et q_s celui de sortie de l'automate).

$$q_1 \xrightarrow{\text{..............}} q_s$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{...}} q_1$$

$$q_1 \xrightarrow{\text{..............}} q_2 \quad q_2 \xrightarrow{\text{...} \leftarrow \text{...............}} q_3 \quad q_3 \xrightarrow{\text{...} \leftarrow \text{...............}} q_4 \quad q_4 \xrightarrow{\text{..} \leftarrow \text{.............}} q_1$$

6 pt

Q2. Preuve de correction partielle Rédigez la preuve (en suivant la méthode de Floyd-Dijsktra-Hoare) qu'à la sortie du programme $y = fib(N)$. La qualité et la précision de la rédaction compte pour une grande part dans la note. Vous prendrez pour invariant en q_1 une propriété de la forme :

$$y = \text{.............................} \ \wedge \ \text{........} = fib(\text{................} - k)$$

où k est une constante que vous devrez déterminer

1 pt

Q3. En déduire les conditions d'utilisation du programme. Détaillez vos étapes de calcul et de simplification.

2 pt

Q4. Comment se comporte le programme pour $N = 0$? Expliquez pourquoi la condition $N > 0$ n'apparaît pas comme condition d'utilisation du programme ?