

RICM3 – Automates et Grammaires

Durée : 1h30, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 3 exercices indépendants
- Il est noté sur 30
- Répondez sur votre copie sauf pour les questions avec pointillés
- N'oubliez pas de mettre votre nom ou votre numéro d'étudiant sur le sujet
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

$\frac{\quad}{10 \text{ pt}}$

Exercice 1 : Schéma de Horner (30 min)

On considère un tableau $D[0..N]$ rempli de $N + 1$ digit (appartenant à $\{0, \dots, 9\}$). On peut voir un tableau de digits comme un entier en considérant que le digit de case 0 correspond aux unités, le digit de la case 1 aux dizaines, celui de la case 2 aux centaines et plus généralement le digit de la case i correspond au coefficient de puissance 10^i .

Exemple : le tableau $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & N-1 & N \\ \hline D[i] & 5 & 0 & 7 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$ correspond à l'entier 13705

De manière générale, le tableau $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} i & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & N-1 & N \\ \hline D[i] & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_{N-1} & d_N \end{array}$ correspond à l'entier

$$d_0 + d_1 \times 10 + d_2 \times 10^2 + d_3 \times 10^3 + \dots + d_{N-1} \times 10^{N-1} + d_N \times 10^N = \sum_{k=0}^N D[k] \times 10^k$$

On prétend que le programme suivant calcule l'entier correspondant au tableau de digits $D[0..N]$, et qu'à la sortie du programme la variable r contient la valeur $\sum_{k=0}^N D[k] \times 10^k$.

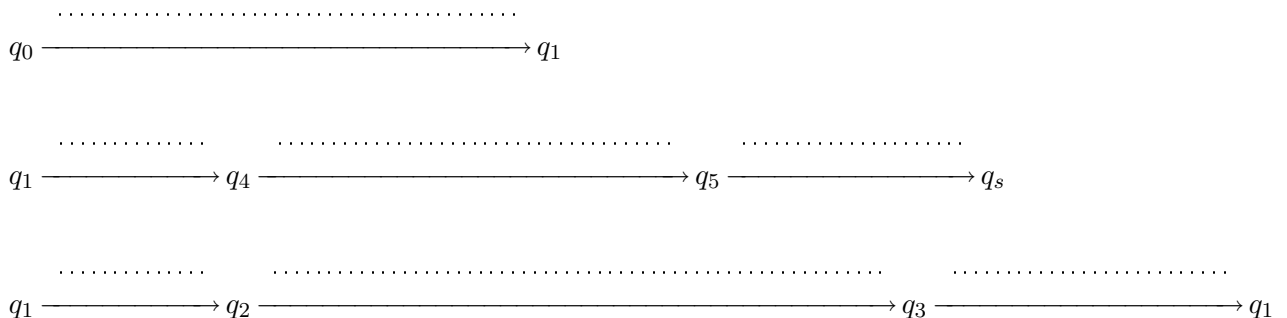
PROGRAMME

```

1  i:=N ; r:=0 ;
2  while(i>0){
3    r := 10 * (r + D[i]) ;
4    i := i-1 ;
5  }
6  r := r + D[0]
7  u := 42 ;
    
```

$\frac{\quad}{1 \text{ pt}}$

Q1. Donnez l'automate correspondant au programme.



0.5 pt

Q2. Donnez la propriété ψ_s associée à l'état de sortie q_s du programme.

2 pt

Q3. Déterminez les propriétés (en justifiant votre choix)

$$\psi_5 \stackrel{def}{=} \dots$$

$$\psi_4 \stackrel{def}{=} \dots$$

2 pt

Q4. Choix de l'invariant de boucle

(a) Écrivez l'implication correspondant à la transition $q_1 \xrightarrow{\dots} q_4$

(b) Choisissez la propriété ψ_1 .

Indication :

$$\psi_1 \stackrel{def}{=} r = \frac{\left(\sum_{k=\dots}^N D[k] \times 10^k \right)}{(10^{\dots})} \wedge \dots$$

(c) Prouvez l'implication.

3.5 pt

Q5. Terminez la preuve de correction partielle du programme.

1 pt

Q6. Donnez les conditions d'utilisations du programme et conclure.

10 pt

Exercice 2 : Calculs de factorielle (30 min)

On considère la définition de la factorielle sous la forme d'une suite récurrente

$$\begin{cases} fac(0) = 1 \\ fac(i+1) = i \times fac(i) \text{ pour } i+1 > 0 \end{cases}$$

1.5 pt

Q1. Programme Donnez un programme qui calcule la factorielle de N

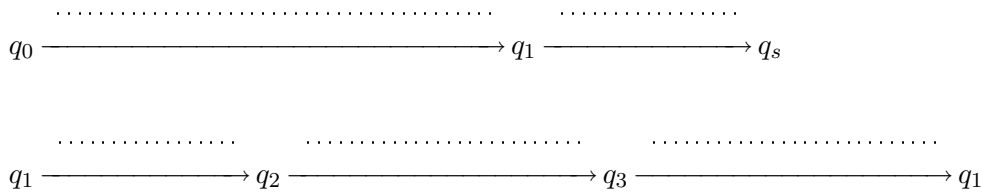
PROGRAMME

```

1  r:= ... ; i:= ... ;
2  while( ..... ){
3      ..... ;
4      ..... ;
5  }
```

0.5 pt

Q2. Automate Donnez les transitions de l'automate correspondant à votre programme.



1 pt

Q3. Question de cours Expliquez ce que signifie qu'une propriété ψ est un invariant de l'état q

0.5 pt

Q4. Propriété de correction Donnez la propriété de correction du programme sous la forme d'un invariant d'état.

5.5 pt

Q5. Preuve de correction partielle Montrez la correction partielle de votre programme à l'aide de la méthode de Floyd-Dijkstra-Hoare.

1 pt

Q6. Conditions d'utilisation En déduire les conditions d'utilisation de votre programme qui garantissent qu'il calcule bien la factorielle de n .

10 pt

Exercice 3 : Calcul des termes de la suite de Fibonacci – version avec seulement deux variables (30 min)

PROGRAMME

```

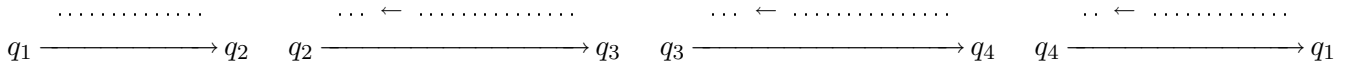
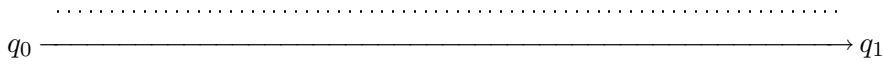
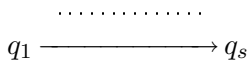
1  i:=N-1 ; x:=1; y:=1 ;
2  while(i<>0){
3      y:=y+x ;
4      x:=y-x ;
5      i:=i-1 ;
6  }
```

On prétend qu'à la sortie du programme le résultat y satisfait la propriété $y = fib(N)$ où

$$\begin{cases} fib(0) = 1 \\ fib(1) = 1 \\ fib(n + 1) = fib(n) + fib(n - 1) \end{cases}$$

1 pt

Q1. Donnez les transitions de l'automate correspondant au programme ci-dessus (q_0 représente le point d'entrée et q_s celui de sortie de l'automate).



6 pt

Q2. Preuve de correction partielle Rédigez la preuve (en suivant la méthode de Floyd-Dijkstra-Hoare) qu'à la sortie du programme $y = fib(N)$. La qualité et la précision de la rédaction compte pour une grande part dans la note. Vous prendrez pour invariant en q_1 une propriété de la forme :

$$y = \dots \wedge \dots = fib(\dots - k)$$

où k est une constante que vous devrez déterminer

1 pt

Q3. En déduire les conditions d'utilisation du programme. Détaillez vos étapes de calcul et de simplification.

2 pt

Q4. Comment se comporte le programme pour $N = 0$? Expliquez pourquoi la condition $N > 0$ n'apparaît pas comme condition d'utilisation du programme ?