MCAL/MT - Indécidabilité de la terminaison de la réécriture (1 TD)

Exercice 1 : Terminaison de programmes GAMMA

On considère divers programmes GAMMA dont on va étudier la terminaison. Pour chacun d'eux donnez

1. un ensemble de départ telle que l'exécution qui termine
2. un ensemble de départ telle que l'exécution qui ne termine pas

Lorsque l'un est impossible, expliquez pourquoi.

Donnée manipulées Les programmes suivantes opèrent sur des constructeurs à un arguments $\mathrm{A}(.)$ et $\mathrm{B}(.)$ et un constructeur sans argument O qui correspondent au type CAML :

```
type data = O | A of data | B of data
```

Q1. Donnez 5 éléments de type `data`.

SOLUTION

O, $\mathrm{A}(\mathrm{O})$, $\mathrm{B}(\mathrm{O})$, $\mathrm{A}(\mathrm{A}(\mathrm{O}))$, $\mathrm{B}(\mathrm{A}(\mathrm{O}))$

Q2. Étudiez la terminaison du programme

$$\Gamma_1 \stackrel{def}{=} \mathrm{A}(\mathrm{O}) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{B}(\mathrm{O}) \;\;||\;\; \mathrm{B}(x) \xrightarrow[r_2]{} \mathrm{A}(x)$$

Q3. Étudiez la terminaison du programme

$$\Gamma_3 \stackrel{def}{=} \mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{A}(\mathrm{B}(x)) \;\;||\;\; \mathrm{B}(\mathrm{A}(x)) \xrightarrow[r_2]{} \mathrm{A}(x)$$

SOLUTION

La règle (r_1) peut s'appliquer à tout terme de la forme $\mathrm{A}(\mathrm{B}^*(\mathrm{O}))$. Considérons un terme $\mathrm{A}(\mathrm{B}^n(\mathrm{O}))$ de cette forme avec $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer (r_1) avec $x = \mathrm{B}^n(\mathrm{O})$ pour générer le terme $\mathrm{A}(\mathrm{B}^{n+1}(\mathrm{O}))$ qui est de la même forme $\mathrm{A}(\mathrm{B}^*(\mathrm{O}))$ et donc on peut recommencer.

Q4. Étudiez la terminaison du programme

$$\Gamma_4 \stackrel{def}{=} \mathrm{A}(\mathrm{B}(x)) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{B}(\mathrm{B}(x)) \;\;||\;\; \mathrm{B}(\mathrm{B}(x)) \xrightarrow[r_2]{} \mathrm{A}(x)$$

Q5. Donnez un programme constitué d'une seule règle qui ne termine jamais quel que soit le multi-ensemble de départ ...

(a) Γ_{5a} fait grandir le multi-ensemble

SOLUTION

$x \longrightarrow x, x$

(b) Γ_{5b} fait grandir l'élément mais pas le multi-ensemble

SOLUTION

$x \longrightarrow \mathrm{A}(x)$

Q6. Étudiez la terminaison du programme $\Gamma_6 \stackrel{def}{=} \mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x)$

Q7. Ajoutez une règle au programme Γ_6 afin qu'il termine pour tout multi-ensemble de départ

SOLUTION

1. *La régle* $\mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_2]{} _$ *va entrer en compétition avec* (r_1) *et consommer les* $\mathrm{A}(\ldots)$ *qui permettent à* (r_1) *de s'appliquer. Sous l'hypothèse d'équité des réactions chimiques*

   « Il est impossible qu'une règle qui pourrait s'appliquer ne soit jamais utilisée. »

   On peut montrer que le système terminera toujours. Sans cette hypothèse on ne peut rien dire, car (r_1) *pourrait s'appliquer indéfiniment sans que jamais* (r_2) *ne s'exécute.*
2. ***Autres solutions*** $\mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x) \xrightarrow[r_2]{} \mathrm{O}$

Q8. Étudiez la terminaison du programme $\Gamma_7 \stackrel{def}{=} \mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \;\; || \;\; \mathrm{A}(x) \xrightarrow[r_2]{} _$

SOLUTION

Les deux règles sont en compétition et l'hypothèse d'équité ne suffit pas pour garantir la terminaison. La terminaison dépend de la proposition d'application des règles : si $|r_1| \leq 2 \times |r_2|$ *alors le programme terminera toujours.*

Exercice 2 : Réduction du PCP au problème de terminaison d'un programme Gamma (40min, 6.5 pt)

Le but de cet exercice est de démontrer que la terminaison d'un programme Gamma est un problème indécidable. Pour le prouver on va réduire le Problème de Correspondance de Post (PCP) – connu pour être indécidable – au problème de la terminaison de programmes Gamma.

Problèmes de Correspondance de Post et exécutions de programmes Gamma (20min, 3.5 pt)

On considére l'alphabet $\{a, c, f, i, \ell\}$ et ε désigne le mot vide (*ie.* le "" des chaînes de caractères).

Q9. (0.25 pt) **Complétez :** Soit D un ensemble de domino

PCP(D) e D telle que le mot obtenu par concaténation de la partie supérieure de

inférieure de

Exemple : Considérons l'ensemble de dominos $D_1 = \left\{ \underset{d_1}{\boxed{\frac{f}{fac}}}, \underset{d_2}{\boxed{\frac{i\ell}{i\ell}}}, \underset{d_3}{\boxed{\frac{ac}{\varepsilon}}} \right\}$. La séquence $d_1.d_3.d_2$ est une solution puisqu'on obtient $f.ac.i\ell$ en haut et $fac.\varepsilon.i\ell$ en bas. La séquence réduite à d_2 est aussi une solution puisqu'on obtient $i\ell$ en haut et en bas.

Exécutions de programmes Gamma On considére les constructeurs Gamma suivants A(.), I(.), C(.), F(.), L(.) qui prennent tous un argument, ainsi qu'un constructeur Gamma sans argument (*ie.* une constante) ε.
À l'aide des constantes et constructeurs précédents on peut représenter les mots écrits sur l'alphabet $\Sigma = \{a, c, f, i, \ell\}$. On désigne par $[\,\omega\,]_\Gamma$ la représentation en Gamma d'un mot $\omega \in \Sigma^*$.

Q10. (0.25 pt) Donnez la représentation en Γ du mot $faci\ell$: $[\,faci\ell\,]_\Gamma = \mathrm{F}(\mathrm{A}(\mathrm{C}(\mathrm{I}(\mathrm{L}(\varepsilon)))))$

Q11. (0.25 pt) Donnez l'exécution du programme Gamma Γ_{D_1} ci-dessous sur l'ensemble réduit à l'élément $\mathrm{G}(\ [\ \mathit{facil}\ ]_\Gamma\ ,\ [\ \mathit{facil}\ ]_\Gamma\ )$

$$\Gamma_{D_1} \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{G}(\ \mathrm{F}(x)\ ,\ \mathrm{F}(\mathrm{A}(\mathrm{C}(y)))\ ) & \xrightarrow[r_1]{} & \mathrm{G}(\ x\ ,\ y\ ) \\ \mathrm{G}(\ \mathrm{I}(\mathrm{L}(x))\ ,\ \mathrm{I}(\mathrm{L}(y))\ ) & \xrightarrow[r_2]{} & \mathrm{G}(\ x\ ,\ y\ ) \\ \mathrm{G}(\ \mathrm{A}(\mathrm{C}(x))\ ,\ y\ ) & \xrightarrow[r_3]{} & \mathrm{G}(\ x\ ,\ y\ ) \end{array} \right.$$

SOLUTION

$$\mathrm{G}(\ [\ \mathit{facil}\ ]_\Gamma\ ,\ [\ \mathit{facil}\ ]_\Gamma\ ) = \mathrm{G}(\ \mathrm{FACIL}(\varepsilon)\ ,\ \mathrm{FACIL}(\varepsilon)\ ) \xrightarrow[r_1]{} \mathrm{G}(\ \mathrm{ACIL}(\varepsilon)\ ,\ \mathrm{IL}(\varepsilon)\ ) \xrightarrow[r_3]{} \mathrm{G}(\ \mathrm{IL}(\varepsilon)\ ,\ \mathrm{IL}(\varepsilon)\ ) \xrightarrow[r_2]{} \mathrm{G}(\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ )$$

Q12. (0.25 pt) Donnez l'exécution du programme Γ_{D_1} sur l'ensemble réduit à l'élément $\mathrm{G}(\ [\ \mathit{acfacil}\ ]_\Gamma\ ,\ [\ \mathit{acfacil}\ ]_\Gamma\ )$

SOLUTION

$$\mathrm{G}(\ [\ \mathit{acfacil}\ ]_\Gamma\ ,\ [\ \mathit{acfacil}\ ]_\Gamma\ ) = \mathrm{G}(\ \mathrm{ACFACIL}(\varepsilon)\ ,\ \mathrm{ACFACIL}(\varepsilon)\ ) \xrightarrow[r_3]{} \mathrm{G}(\ \mathrm{FACIL}(\varepsilon)\ ,\ \mathrm{ACFACIL}(\varepsilon)\ )$$

Q13. (0.5 pt) On souhaite ajouter une règle (r_0) au programme Γ_{D_1} afin qu'il **ne termine pas** lorsqu'on l'exécute sur $\mathrm{G}(\ [\ \mathit{facil}\ ]_\Gamma\ ,\ [\ \mathit{facil}\ ]_\Gamma\ )$. Complétez la régle (r_0).

$$\mathrm{G}(\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ) \xrightarrow[r_0]{} \mathrm{G}(\ [\ \mathit{facil}\ ]_\Gamma\ ,\ [\ \mathit{facil}\ ]_\Gamma\ )$$

Généralisation Dans les questions précédentes on a raisonné sur *la solution* « *facil* » du PCP(D_1) ; on veut maintenant généraliser le raisonnement à toute solution du PCP(D_1).

Q14. (1 pt) En vous inspirant fortement du programme Γ_{D_1} donnez un programme Γ'_{D_1} qui **ne termine pas** lorsqu'on l'exécute sur $\mathrm{G}'(\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ,\ [\ \omega\ ]_\Gamma\ )$ quel que soit le mot ω correspondant à une solution du PCP(D_1). Pour cela on utilise un constructeur $\mathrm{G}'(\ .\ ,\ .\ ,\ .\ )$ à trois arguments au lieu de $\mathrm{G}(\ .\ ,\ .\ )$.

SOLUTION

$$\Gamma'_{D_1} \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{G}'(\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ,\ w\ ) & \xrightarrow[r_0]{} & \mathrm{G}'(\ w\ ,\ w\ ,\ w\ ) \\ \mathrm{G}'(\ \mathrm{F}(x)\ ,\ \mathrm{F}(\mathrm{A}(\mathrm{C}(y)))\ ,\ w\ ) & \xrightarrow[r_1]{} & \mathrm{G}'(\ x\ ,\ y\ ,\ w\ ) \\ \mathrm{G}'(\ \mathrm{I}(\mathrm{L}(x))\ ,\ \mathrm{I}(\mathrm{L}(y))\ ,\ w\ ) & \xrightarrow[r_2]{} & \mathrm{G}'(\ x\ ,\ y\ ,\ w\ ) \\ \mathrm{G}'(\ \mathrm{A}(\mathrm{C}(x))\ ,\ y\ ,\ w\ ) & \xrightarrow[r_3]{} & \mathrm{G}'(\ x\ ,\ y\ ,\ w\ ) \end{array} \right.$$

Programme Gamma associé à un PCP : application à un autre ensemble de dominos

Q15. (0.5 pt) Donnez une séquence de dominos de l'ensemble D_2 ci-dessous qui soit une solution du PCP(D_2) et donnez le mot correspondant à cette solution.

$$D_2 = \left\{ \underset{d_1}{\boxed{\frac{ia}{a}}},\ \underset{d_2}{\boxed{\frac{acc}{ci}}},\ \underset{d_3}{\boxed{\frac{f}{fac}}} \right\}$$

SOLUTION

$d_3.d_2.d_1$ *est une solution du* PCP *sur* D_2 *correspondant au mot* $\omega \stackrel{def}{=} faccia$. *En effet,* $\boxed{\frac{f}{fac}}\boxed{\frac{acc}{ci}}\boxed{\frac{ia}{a}}$ *donne*

$$u_3.u_2.u_1 = f.acc.ia = faccia = fac.ci.a = v_3.v_2.v_1$$

Q16. (0.5 pt) Donnez un programme Γ'_{D_2} qui **ne termine pas** lorsqu'on l'exécute sur $\mathrm{G}'(\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ,\ [\ \omega\ ]_\Gamma\ )$ où ω est le mot correspondant à une solution du problème $\textsc{pcp}(D_2)$.

SOLUTION

$$\Gamma'_{D_2} \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{G}'(\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ,\ w\ ) & \xrightarrow[r_0]{} & \mathrm{G}'(\ w\ ,\ w\ ,\ w\ ) \\ \mathrm{G}'(\ \mathrm{F}(x)\ ,\ \mathrm{F}(\mathrm{A}(\mathrm{C}(y)))\ ,\ w\ ) & \xrightarrow[r_1]{} & \mathrm{G}'(\ x\ ,\ y\ ,\ w\ ) \\ \mathrm{G}'(\ \mathrm{A}(\mathrm{C}(\mathrm{C}(x)))\ ,\ \mathrm{C}(\mathrm{I}(y))\ ,\ w\ ) & \xrightarrow[r_2]{} & \mathrm{G}'(\ x\ ,\ y\ ,\ w\ ) \\ \mathrm{G}'(\ \mathrm{I}(\mathrm{A}(x))\ ,\ \mathrm{A}(y)\ ,\ w\ ) & \xrightarrow[r_3]{} & \mathrm{G}'(\ x\ ,\ y\ ,\ w\ ) \end{array} \right.$$

Indécidabilité de la terminaison de programmes Gamma (20min, 3 pt)

- On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de tous les ensembles de dominos possibles sur l'alphabet Σ. Ainsi, $D \in \mathscr{D}$ est un ensemble de dominos.
- PCPSAT désigne l'ensemble des ensembles D de dominos pour lesquels $\textsc{pcp}(D)$ a une solution. Autrement dit, $D \in$ PCPSAT si et seulement si $\textsc{pcp}(D)$ admet une solution.
- *Gamma* désigne l'ensemble de tous les programmes Gamma possibles.
- On note GTT l'ensemble de programmes $\Gamma \in$ *Gamma* dont l'exécution se termine quel que soit l'ensemble E sur lequel on l'exécute. Autrement dit, $\Gamma \in$ GTT signifie que Γ termine toujours.

$$\textsc{Gtt} = \{\Gamma \in \mathit{Gamma} \mid \forall E,\ \Gamma(E) \not\to \infty\} \quad \textit{et} \quad \overline{\textsc{Gtt}} = \mathit{Gamma} \setminus \textsc{Gtt}.$$

Q17. (0.25 pt) **Complétez :** $\Gamma \in \overline{\textsc{Gtt}}$ signifie qu'il existe (au moins) un ensemble E tel que $\Gamma(E) \to \infty$ autrement dit l'exécution de Γ sur E ne termine pas .

Q18. (0.25 pt) **Complétez le diagramme de réduction et les « on doit montrer »**

$$\begin{array}{rcl} D \in \mathscr{D} & \xrightarrow[\textit{traduction}]{M_R} & \Gamma'_D \in \mathit{Gamma} \\ \underbrace{D \in \textsc{pcpsat}}_{} & \underset{(\ddagger)}{\Longleftrightarrow} & \underbrace{\Gamma'_D \in \overline{\textsc{Gtt}}}_{} \\ \textit{indécidable} & \Longrightarrow & \textit{indécidable} \end{array}$$

Pour montrer l'indécidabilité de la terminaison de programmes Gamma que doit-on faire ?

(a) On doit montrer qu'il existe une MT qui traduit tout ensemble de domino D en un programme Γ'_D

(b) On doit montrer l'équivalence $(\ddagger)$.

Q19. (0.5 pt) **(a) Complétez la définition de la traduction**

Un domino $\boxed{\dfrac{u}{v}} \in D$ peut être vu comme un couple (u, v) que l'on peut inscrire sur la bande 1 d'une MT. Un ensemble D de domino
cette bande par une séquence de couple MT
M_R à deux bande
bande 1 et pour chaque domino d_i re (u, v), elle inscrit la règle Gamma $\mathrm{G}'(\ u(x)\ ,\ v(x)\ ,\ w\ ) \xrightarrow[r_i]{} \mathrm{G}'(\ x\ ,\ y\ ,\ w\ )$ sur la bande 2. On ajoute ensuite à la bande 2, la règle (r_0) ; ainsi la bande 2 contient le programme Γ'_D tel qu'on l'a défini dans la première partie de cet exercice.

Q20. (0.5 pt) **(b) Complétez la preuve de** (‡)

($\Rightarrow$) On doit montrer que si $D \in$ PCPSAT alors le programme Γ'_D construit par $M_R(D)$ ne termine pas toujours . Il suffit donc de trouver un ensemble E sur lequel l'exécution de Γ'_D ne termine pas . Puisque $D \in$ PCPSAT, le problème PCP(D) admet une solution ; notons ω le mot corre
de l'exercice que Γ'_D ne termine pas si on l'exécute sur l'ensemble $\{\mathrm{G}'(\ \epsilon\,,\,\epsilon\,,\,[\,\omega\,]_\Gamma\ )\}$.
Il suffit donc de prendre cet ensemble pour E.

Q21. (0.5 pt) **(b) Complétez la preuve de** (‡)

($\Leftarrow$) Montrons la réciproque : On doit montrer que si il existe un E tel que $\Gamma'_D(E)$ ne termine pas alors il existe une solution au PCP(D) (et donc $D \in$ PCPSAT).
À l'excc (r_0), toute Γ'_D appliquée $\mathrm{G}'(\ \omega_1\,,\,\omega_2\,,\,\omega\ )$ font diminuer le mot ω_1 ou le mot ω_2 (ou le
règle $\Gamma_D(E)$ a une exécution infinie il e
qu'elle utilise la règle (r_0) régulièrement car c'e
mot ω_1 et ω_2. Une exécution infinie contient donc plusieurs applications de (r_0). Elle aura donc forcément la forme $\ldots \xrightarrow[r_0]{} \mathrm{G}'(\ \omega\,,\,\omega\,,\,\omega\ ) \xrightarrow[r_{i_1}]{} \ldots \xrightarrow[r_{i_k}]{} \mathrm{G}'(\ \epsilon\,,\,\epsilon\,,\,\omega\ ) \xrightarrow[r_0]{} \ldots$
On constate sur cette portion d'exécution que le $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}$ consomment intégralement le ω. Puisque chacune
cela signifie que la séquence $d_{i_1}, \ldots, d_{i_k}$ e PCP(D).

Q22. (0.5 pt) **Complétez la conclusion :** On a montré par réduction que la terminaison de programmes Gamma est indécidable.

SUPPOSONS LE CONTRAIRE ET MONTRONS UNE CONTRADICTION : Suppo
existe un algorithme capable de décider la terminaison de
alors on pourrait savoir si un PCP(D) a une solution. Pour cela, étant donné un ensemble D il suffirait de construire le programme Γ'_D au moyen de M_R
e

- si Γ'_D termine toujours
  alors PCP(D) n'a pas de solution
- s'il existe un cas où Γ'_D ne termine pas
  alors PCP(D) admet une solution

On serait donc capable de décider le
qu'on sait impo CONTRADICTION.