MCAL/MT - Théorème de Rice & Preuve par Réduction (2 TD)

Exercice 1 : Formalisation et Théorème de Rice

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des codages binaires de machines de Turing.

Q1. Complétez : Un ensemble de machines de Turing est un ensemble de Rice s'il s'écrit $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\}$ où la condition $\mathcal{C}$ porte sur le langage reconnu par m

Q2. Complétez : Tout ensemble de Rice non-$\ldots\ldots\ldots$ c'est-à-dire différent de $\ldots\ldots$ et de .., est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Q3. Formalisez en termes mathématiques les ensemble suivants

1. L'ensemble des machines de Turing qui n'acceptent pas, en tant que mot, leur codage en binaire :
   $L_1 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
2. L'ensemble des machines de Turing dont l'exécution sans paramètre est infinie :
   $L_2 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
3. L'ensemble des machines de Turing qui acceptent tous les mots binaires :
   $L_3 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
4. L'ensemble des machines de Turing équivalentes à la MT $M_\emptyset$ qui reconnaît le langage vide :
   $L_4 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
5. L'ensemble des MT qui rejettent le mot binaire ϵ (c'est-à-dire s'arrêtent dans l'état $\bigotimes$)
   $L_5 = \{m \in \mathcal{M} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Q4. Parmi les ensembles L_1 à L_4, certains sont des ensembles de Rice. Lesquels ? Rédigez votre réponse de la manière suivante en définissant la condition de Rice, $\mathcal{C}$, correspondant à l'ensemble.

Indication : ... est un ensemble de Rice car il peut s'écrire $\{m \in \mathcal{M} \mid \mathcal{C}(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \)\}$ avec $\mathcal{C}(L) \stackrel{\text{def}}{=} \ldots$

Q5. Expliquez pourquoi les autres ensembles ne sont pas un ensemble de Rice.

Q6. Si un ensemble L n'est pas un ensemble de Rice, que peut-on en déduire ?

Exercice 2 : Pourquoi faut-il une équivalence ($\ddagger$) dans une réduction ?

$$\begin{array}{ccc} \omega \in \Sigma^* & \xrightarrow[traduction]{M_R} & R(\omega) = \omega' \in \Sigma'^* \\ \omega \in L & \underset{(\ddagger)}{\Longleftrightarrow} & R(\omega) \in L' \end{array}$$

Q7. Supposons que le diagramme exige seulement une implication ($\Rightarrow$)

$$\omega \in L \underset{(\ddagger)}{\Longrightarrow} R(\omega) \in L'.$$

Donnez un langage L' reconnaissable qui satisfait l'implication et ne donne aucune information sur L.

Q8. Supposons que le diagramme exige seulement une implication ($\Leftarrow$)

$$\omega \in L \underset{(\ddagger)}{\Leftarrow} R(\omega) \in L'$$

Donnez un langage L' reconnaissable qui satisfait l'implication et ne donne aucune information sur L.

Exercice 3 : Diagramme de réduction complémentaire

Étant donné un diagramme de réduction de $\overset{?}{\in} L$ à $\overset{?}{\in} L'$. Démontrez que le même diagramme de réduction est valable pour les langages complémentaires. Autrement dit c'est aussi un diagramme de réduction de $\overset{?}{\in} \overline{..}$ à $\overset{?}{\in} \overline{...}$.

Q9. Complétez

$$\begin{array}{lcl} \omega \in \Sigma^* & \xrightarrow[traduction]{M_R} & R(\omega) = \omega' \in \Sigma'^* \\ \omega \in .. & ..... & R(\omega) \in ... \\ & (\ddagger) & \\ \omega \in \overline{..} & ..... & R(\omega) \in \overline{...} \\ & (\dagger) & \end{array}$$

Q11. Que faut-il montrer ?

Q11. Rédigez la preuve (simple) en 4 lignes

Exercice 4 : Indécidabilité en combinant Rice et Réduction

À l'aide d'un raisonnement par contradiction utilisant l'exemple $\mathcal{P}_\omega$ d'application du théorème de Rice (avec $\omega = \epsilon$), montrez que « l'ensemble L des machines de Turing dont l'exécution sans paramètre s'arrête » est indécidable.

Q12. Donnez la définition mathématique de L.

Q13. L correspond-t'il à un ensemble de Rice $\mathcal{P}_\mathcal{C}$? si oui, donnez la condition $\mathcal{C} : \mathcal{L} \to \mathit{Bool}$, sinon expliquez pourquoi.

Preuve d'indécidabilité par réduction de $\mathcal{P}$ à L.

Q14. Montrez que l'ensemble $\mathcal{P}_\epsilon \overset{\text{def}}{=} \{m \in \mathcal{M} \mid U(m)(\epsilon) \to \textcircled{\scriptsize◎}\}$ est indécidable.

Q15. Donnez une MT M_∞ qui ne termine jamais quel que soit le ruban.

Démontrons que L est indécidable par réduction de l'ensemble $\mathcal{P}_\epsilon$ à L

On considère la transformation R définie par $R(m)(..) \overset{\text{def}}{=} [\ \mathsf{if}\ \underbrace{U(m)(..)}_{\overset{?}{\to} ....}\ \mathsf{then}\ \to \textcircled{\scriptsize◎}\ \mathsf{else}\ M_\infty\ ]_2$

Q16. Complétez le diagramme de réduction

$$\begin{array}{lcl} ..... & \xrightarrow[traduction]{M_R} & ..... \\ m \in \mathcal{P}_\epsilon & ..... & ..... \in L \\ & (\ddagger) & \end{array}$$

Q17. Si le diagramme de réduction est correct, que peut-on en conclure ?

Q18. Que reste-t'il à montrer pour avoir le droit d'appliquer la réduction ?

Q19. Rédiger la preuve de ($\Rightarrow$) en commençant par expliciter ce qu'on doit montrer.

Q20. Rédiger la preuve de ($\Leftarrow$) en commençant par expliciter ce qu'on doit montrer.

Exercice 5 : Indécidabilité de l'équivalence de machines de Turing

Le théorème de Rice permet de montrer qu'il n'existe pas de MT (*ie.* de programme) capable de dire si deux MTs (ou programmes) fournis en paramètre sont équivalents (c'est-à-dire qu'ils retournent le même résultat sur toutes les entrées possibles).

Q21. Complétez (répondez sur votre copie). Deux MT M_1 et M_2 sont équivalentes si et seulement si .....

Q22. Étant donnée une MT M', montrez, à l'aide du théorème de Rice, que l'ensemble $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{m \mid U(m) \equiv M'\}$ des machines de Turing équivalentes à M' est indécidable.

Exercice 6 :

Soit $\overline{L}$ un langage indécidable. Appliquez les définitions du cours afin de montrer que L est indécidable.