MCAL/MT - série 3 - (1 TD)
Ensemble non-dénombrable et Programmation chimique

Exercice 1 : Connaissez-vous vos définitions ?

On considère l'alphabet $\{0, 1\}$.

Q1. Expliquez la différence entre une MT M_D qui **décide** le langage L et une MT M_R qui **reconnaît** le langage L.

Q2. Donnez une MT qui **décide** le langage $\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Q3. Donnez une MT qui **reconnaît** mais ne **décide pas** le langage $\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Q4. Donnez une MT qui **reconnaît** mais ne **décide pas** le langage $\overline{\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}}$

Q5. Considérons un langage L.

Si une MT M_1 décide le langage L alors le langage $\overline{L}$ est décidable.

Démontrez ce théorème :

(a) Commencez par répondre à la question : Que doit-on montrer ?

(b) Rédigez la preuve.

Q6. Considérons un langage L.

Si une MT M_1 reconnaît mais ne décide pas le langage L et si une MT M_2 reconnaît mais ne décide pas le langage $\overline{L}$ alors on peut conclure que le langage L est décidable.

Démontrez ce théorème :

(a) Commencez par répondre à la question : Que doit-on montrer ?

(b) Rédigez la preuve.

Exercice 2 : $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ non-dénombrable

Q7. Complétez On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ *e* ..... *de* ..... *à un argument* ....., *c'e* ..... *associent un* ..... : $\mathbb{N} \to \mathbb{B} = \{P \mid$ .....$\}$. *Considérons un* ..... P *de* $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$. *Il e* ..... *par un tableau* $[0...\mathbb{N}[$ *qui indique pour chaque entier* i *la valeur* ..... $P(i)$ *associée.*

Q8. Donnez quatre éléments de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$.

Q9. Rangez vos 4 éléments dans un tableau de booléens à deux dimensions $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$; **donnez** les 4 premières lignes, 6 premières colonnes du tableau.

Q10. Complétez la preuve On montre que $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e

preuve par ..... :

S ..... que l'ensemble $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ soit dénombrable c'e ..... avec $\mathbb{N}$. Alors il existe une ..... entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ qui, à un entier ℓ, ... le prédicat P_ℓ. On peut alors ranger ..... le dans un tableau $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$ à la manière de George ..... en plaçant sur la ..... ℓ le ..... du prédicat ..... On peut donc re un élément de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ par son ..... de ligne : la ligne ℓ définit le prédicat P_ℓ.

Considérons la ..... du tableau et exhibons une contradiction : Puisque le tableau contient ..... prédicat $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ défini par $P(i) \stackrel{\text{def}}{=}$ ..... doit ..... tableau à une certaine ligne, disons ℓ, donc P .....

Exemple : Le prédicat P correspond à la ..... de la ..... du tableau. Dans le cas du tableau de la question précédente, le prédicat P serait

$$P(0) = \ldots,\ P(1) = \ldots,\ P(2) = \ldots,\ P(3) = \ldots, \textit{etc}$$

Évaluons P au point ℓ :

$P(\ell) =$ ..... *puisque* ..... *; mais, par ailleurs,*

$P(\ell) =$ ..... *par* ..... : Contradiction.

Conclusion : En suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ ....., on aboutit à ....., donc $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ ....

Exercice 3 : Principe de numérotation de Cantor

On a montré grâce au théorème de Cantor-Bernstein que $\mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples d'entiers est dénombrable. Par contre, ce théorème bien utile ne donne pas la bijection, il dit seulement qu'elle existe.

Georg Cantor (1845-1918) a proposé une définition constructive de la bijection $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Il définit un tableau $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$ qui contient tous les couples d'entiers possibles : à la ligne ℓ et la colonne c on trouve le couple (ℓ, c). On obtient un tableau à deux dimensions (infinie) de la forme :

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	$c = 0$	1	2	3	4	$\ldots$
$\ell = 0$	$(0,0)_{\simeq 0}$	$(0,1)_{\simeq 2}$	$(0,2)_{\simeq 5}$	$(0,3)_{\simeq 9}$	$(0,4)_{\simeq 14}$	$\ldots$
1	$(1,0)_{\simeq 1}$	$(1,1)_{\simeq ..}$	$(1,2)_{\simeq ..}$	$(1,3)_{\simeq .....}$	$(1,4)_{\simeq .....}$	$\ldots$
2	$(2,0)_{\simeq 3}$	$(2,1)_{\simeq ..}$	$(2,2)_{\simeq .....}$	$(2,3)_{\simeq .....}$	$(2,4)_{\simeq 25}$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pour attribuer un numéro unique à chaque couple, on parcourt le tableau suivant les anti-diagonales de Cantor en commençant par donner le numéro 0 au couple (0,0). Ce procédé de numérotation établit une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers.

Construction de la bijection de Cantor

On peut définir en Γ le programme qui construit la relation bijection C_2 qui associe un numéro de Cantor n à chaque couple (ℓ, c). Les deux réactions ci-dessous construisent $C_2(n, (\ell, c))$ si et seulement si $n \simeq (\ell, c)$ par la numérotation de Cantor.
Au départ le multi-ensemble est réduit à un élément $\{\!|C_2(0, (0, 0))|\!\}$ qui va servir à lancer la numérotation de Cantor des vecteurs d'entiers, de taille quelconque. La numérotation de Cantor des vecteurs de 2 entiers se code en GAMMA de la manière suivante :

Q11. Complétez

$$\begin{cases} C_2(n, (\ell, c)) & \xrightarrow{\ell \geq 1} & C_2(n+1, (\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots)) \\ C_2(n, (\,..\,,\,..\,)) & \longrightarrow & C_2(n+1, (\ldots\ldots\ldots\ldots, \,..\,)) \end{cases}$$

Q12. Effectuez les 10 premières réactions des règles précédentes sur le multi-ensemble $\{\!|C_2(0, (0, 0))|\!\}$.

Généralisation du principe de numérotation de Cantor à $\mathbb{N}^*$

On a montré que $\mathbb{N}^2$ l'ensemble des vecteurs d'entiers de taille 2 est dénombrable.

Q13. À partir de C_2 donnez en Gamma un procédé de numérotation des vecteurs d'entiers (i, j, k) vus comme des couples $((i, j), k)$.

Q14. Donnez une règle Gamma qui permet de construire $C_3(n, (i, j, k))$ à partir de C_2.

Q15. Généralisation Donnez une règle Gamma qui permet de construire la $(p+1)^{ieme}$ bijection de Cantor ($\mathbb{N}^{p+1} \simeq \mathbb{N}$) sous la forme d'une relation $C_{p+1}(n, (i_1, i_2, \ldots, i_p, i_{p+1}))$ construite à partir de C_p.