MCAL/MT - série 3 - (1 TD)
Ensemble non-dénombrable et Programmation chimique

Exercice 1 : Connaissez-vous vos définitions ?

On considère l'alphabet $\{0, 1\}$.

Q1. Expliquez la différence entre une MT M_D qui **décide** le langage L et une MT M_R qui **reconnaît** le langage L.

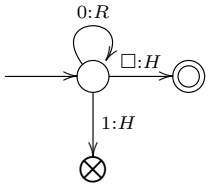
SOLUTION

— *La* MT M_D *termine pour tout mot de* $\omega \in \{0,1\}^*$. *Elle répond* $\mathbb{V}$ *si* $\omega \in L$ *et* $\mathbb{F}$ *si* $\omega \notin L$. *À partir de* M_D *on peut alors construire un machine qui reconnaît* $\overline{L}$ *en inversant ses états* ◎ *et* ⊗.

— *La* MT M_R *termine dans l'état* ◎ *pour tout mot* $\omega \in L$. *Pour certains mots* $\omega \notin L$ *elle peut ne pas s'arrêter. On ne peut donc pas utiliser* M_R *pour construire une* MT *qui reconnaît* $\overline{L}$.

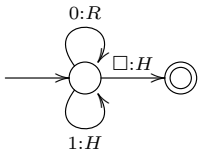
Q2. Donnez une MT qui **décide** le langage $\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

SOLUTION



Q3. Donnez une MT qui **reconnaît** mais ne **décide pas** le langage $\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

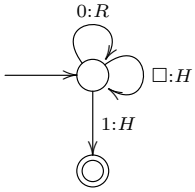
SOLUTION



Cette MT *ne boucle indéfiniment dès qu'elle rencontre le symbole* 1.

Q4. Donnez une MT qui **reconnaît** mais ne **décide pas** le langage $\overline{\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}}$

SOLUTION



Cette MT *passe les symboles* 0 *et finit par boucler si elle ne rencontre pas de symbole* 1.

Q5. Considérons un langage L.

Si une MT M_1 *décide le langage* L *alors le langage* $\overline{L}$ *est décidable.*

Démontrez ce théorème :

(a) Commencez par répondre à la question : Que doit-on montrer ?

(b) Rédigez la preuve.

SOLUTION

(a) On doit montrer qu'il existe une MT M_2 *qui décide le langage* $\overline{L}$*, c'est-à-dire que*

(i) M_2 *termine pour tout mot* $\omega \in \{0,1\}^*$,

(ii) M_2 *s'arrête sur* $\circledcirc$ *si* $\omega \in \overline{L}$ *ie. si* $\omega \notin L$*, ce qui correspond au cas où* M_1 *s'arrête en* $\otimes$.

(iii) M_2 *s'arrête sur* $\otimes$ *si* $\omega \notin \overline{L}$ *ie. si* $\omega \in L$ *ce qui correspond au cas où* M_1 *s'arrête en* $\circledcirc$

(b) On construit la machine de Turing M_2 *en prenant une copie de* M_1 *dans laquelle on remplace l'état* $\circledcirc$ *par* $\otimes$ *et* $\otimes$ *par* $\circledcirc$*. Ce changement n'affecte pas la terminaison puisqu'il n'y a pas de transitions sortantes de* $\circledcirc$ *et* $\otimes$*, donc (i) est satisfait. Ce changement inverse la réponse de* M_1 *ce qui satisfait (ii) et (iii).*

Q6. Considérons un langage L.

Si une MT M_1 *reconnaît mais ne décide pas le langage* L *et si une* MT M_2 *reconnaît mais ne décide pas le langage* $\overline{L}$ *alors on peut conclure que le langage* L *est décidable.*

Démontrez ce théorème :

(a) Commencez par répondre à la question : Que doit-on montrer ?

(b) Rédigez la preuve.

SOLUTION

(a) On doit montrer qu'il existe une MT M *qui décide le langage* $\overline{L}$*, c'est-à-dire que*

(i) M *termine pour tout mot* $\omega \in \{0,1\}^*$,

(ii) M *s'arrête sur* $\circledcirc$ *si* $\omega \in L$*, ce qui correspond au cas où* M_1 *s'arrête en* $\circledcirc$.

(iii) M *s'arrête sur* $\otimes$ *si* $\omega \notin \overline{L}$*, ce qui correspond au cas où* M_2 *s'arrête en* $\circledcirc$

(b) On construit une machine de Turing M *à deux bandes sur lesquelles on recopie* ω*. On exécutera* M_1 *sur* B_1 *et* M_2 *sur* B_2*. La* MT M *agit comme un ordonanceur qui exécute simultanément ou alternativement une transition de* M_1 *et une transition de* M_2*. Elle s'arrête lorsqu'une de deux machines de Turing atteint un état accepteur ; ce qui arrivera forcément quel que soit* $\omega \in \{0,1\}^*$ *puisque soit* $\omega \in L$ *et alors* $M_1 \to^* \circledcirc$*, soit* $\omega \notin L$ *et alors* $M_2 \to^* \circledcirc$*. Si c'est* M_1 *qui s'arrête la première en* $\circledcirc$ *alors* M *passe en* $\circledcirc$*; si c'est* M_2 *qui atteint la première l'état* $\circledcirc$ *alors* M *passe en* $\otimes$.
On garde pour un futur examen la construction précise de l'ordonanceur ...

Exercice 2 : $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ non-dénombrable

Q7. Complétez On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{\mathbb{V}, \mathbb{F}\}$. $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ *e* prédicat booléen : $\mathbb{N} \to \mathbb{B} = \{P \mid i \in \mathbb{N},\ P(i) \in \mathbb{B}\}$. Considérons un prédicat P de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$. Il *e* complètement défini par un tableau $[0...\mathbb{N}[$ qui indique pour chaque entier i la valeur booléene $P(i)$ associée.

Q8. Donnez quatre éléments de $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$.

SOLUTION

$$\begin{array}{lcccl} & \mathbb{N} & \to & \mathbb{B} & \\ P_0 : & i & \mapsto & \mathbb{F} & \textit{la fonction constante, qui vaut toujours faux} \\ P_1 : & i & \mapsto & \mathbb{V} & \textit{la fonction constante, qui vaut toujours vrai} \\ P_2 : & i & \mapsto & i \stackrel{?}{=} 0 & \textit{le test de nullité} \\ P_3 : & i & \mapsto & i \bmod 2 \stackrel{?}{=} 0 & \textit{le test de parité} \end{array}$$

Q9. Rangez vos 4 éléments dans un tableau de booléens à deux dimensions $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$; **donnez** les 4 premières lignes, 6 premières colonnes du tableau.

SOLUTION

$\mathbb{N} =$	0	1	2	3	4	5	...
P_0	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	...
P_1	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	...
P_2	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	...
P_3	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	...

Q10. Complétez la preuve On montre que $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ e
preuve par contradiction :

Suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ soit dénombrable c'e
$\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ qui, à un entier ℓ, associe le prédicat P_ℓ. On peut alors ranger tous le $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$
à la manière de George ℓ le
P_ℓ. On peut donc re $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ par son numéro de ligne : la ligne ℓ définit le prédicat P_ℓ.

Considérons la diagonale du tableau et exhibons une contradiction :
Puisque le tableau contient tous le $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ défini par $P(i) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(P_i(i))$ doit apparaître dans le tableau à une certaine ligne, disons ℓ, donc $P = P_\ell$.

Exemple : Le prédicat P correspond à la négation de la diagonale du tableau. Dans le cas du tableau de la question précédente, le prédicat P serait

$$P(0) = \mathbb{V},\ P(1) = \mathbb{F},\ P(2) = \mathbb{V},\ P(3) = \mathbb{V}, \textit{etc}$$

Évaluons P au point ℓ :

$P(\ell) = P_\ell(\ell)$ *puisque* $P = P_\ell$ *; mais, par ailleurs,*
$P(\ell) = \neg(P_\ell(\ell))$ *par définition de* P : Contradiction.

Conclusion : En suppo $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ dénombrable, on aboutit à une contradiction, donc $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ n'e

Exercice 3 : Principe de numérotation de Cantor

On a montré grâce au théorème de Cantor-Bernstein que $\mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples d'entiers est dénombrable. Par contre, ce théorème bien utile ne donne pas la bijection, il dit seulement qu'elle existe.
Georg Cantor (1845-1918) a proposé une définition constructive de la bijection $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Il définit un tableau $[0..\mathbb{N}[\times[0..\mathbb{N}[$ qui contient tous les couples d'entiers possibles : à la ligne ℓ et la colonne c on trouve le couple (ℓ, c). On obtient un tableau à deux dimensions (infinie) de la forme :

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	$c = 0$	1	2	3	4	...
$\ell = 0$	$(0,0)_{\simeq 0}$	$(0,1)_{\simeq 2}$	$(0,2)_{\simeq 5}$	$(0,3)_{\simeq 9}$	$(0,4)_{\simeq 14}$	...
1	$(1,0)_{\simeq 1}$	$(1,1)_{\simeq 4}$	$(1,2)_{\simeq 8}$	$(1,3)_{\simeq 13}$	$(1,4)_{\simeq 19}$	...
2	$(2,0)_{\simeq 3}$	$(2,1)_{\simeq 7}$	$(2,2)_{\simeq 12}$	$(2,3)_{\simeq 18}$	$(2,4)_{\simeq 25}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pour attribuer un numéro unique à chaque couple, on parcourt le tableau suivant les anti-diagonales de Cantor en commençant par donner le numéro 0 au couple (0,0). Ce procédé de numérotation établit une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers.

Construction de la bijection de Cantor

On peut définir en Γ le programme qui construit la relation bijection C_2 qui associe un numéro de Cantor n à chaque couple (ℓ, c). Les deux réactions ci-dessous construisent $C_2(n, (\ell, c))$ si et seulement si $n \simeq (\ell, c)$ par la numérotation de Cantor.
Au départ le multi-ensemble est réduit à un élément $\{\!|C_2(0, (0, 0))|\!\}$ qui va servir à lancer la numérotation de Cantor des vecteurs d'entiers, de taille quelconque. La numérotation de Cantor des vecteurs de 2 entiers se code en GAMMA de la manière suivante :

Q11. Complétez

$$\begin{cases} C_2(n, (\ell, c)) & \xrightarrow{\ell \geq 1} & C_2(n+1, (\ell - 1, c+1)) \\ C_2(n, (0, c)) & \longrightarrow & C_2(n+1, (c+1, 0)) \end{cases}$$

Q12. Effectuez les 10 premières réactions des règles précédentes sur le multi-ensemble $\{\!|C_2(0, (0, 0))|\!\}$.

Généralisation du principe de numérotation de Cantor à $\mathbb{N}^*$

On a montré que $\mathbb{N}^2$ l'ensemble des vecteurs d'entiers de taille 2 est dénombrable.

Q13. À partir de C_2 donnez en Gamma un procédé de numérotation des vecteurs d'entiers (i, j, k) vus comme des couples $((i, j), k)$.

Q14. Donnez une règle Gamma qui permet de construire $C_3(n, (i, j, k))$ à partir de C_2.

Q15. Généralisation Donnez une règle Gamma qui permet de construire la $(p+1)^{ieme}$ bijection de Cantor ($\mathbb{N}^{p+1} \simeq \mathbb{N}$) sous la forme d'une relation $C_{p+1}(n, (i_1, i_2, \ldots, i_p, i_{p+1}))$ construite à partir de C_p.

SOLUTION

1. *On ajoute la réaction : $C_2(n, (i, j)),\ C_2(n', (n, k)) \to C_3(n', (i, j, k))$ où C_3 est la numérotation de Cantor des vecteurs à 3 éléments.*

   Pourquoi obtient-on une bijection ? *La numérotation C_2 encode une bijection. Par conséquent, $C_2(n', (n, k))$ équivaut à $n' \leftrightarrow (n, k)$ et $C_2(n, (i, j))$ équivaut $n \leftrightarrow (i, j)$. Autrement dit, n est l'identifiant unique du couple (i, j) donc on peut sans risque de confusion interpréter le n du couple (n, k) comme le couple (i, j) – on obtient $((i, j), k)$ – puis interpréter cette écriture comme celle du triplet (i, j, k). On définit C_3 comme la combinaison de deux applications de C_2 comme suit :*

$$n' \overset{C_2}{\leftrightarrow} (n, k) \overset{C_2}{\leftrightarrow} ((i, j), k) \leftrightarrow (i, j, k)$$

2. *On remarque que* $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{n-1}, i_n)$ *peut s'écrire* $(((i_1, i_2), i_3), \ldots, i_{n-1}), i_n)$ *et on utilise récursivement la numérotation sur les couples – comme on l'a fait pour les triplets* (i, j, k) *– jusqu'à obtenir* $C_n(e, (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{n-1}, i_n))$ *où* e *est l'entier correspondant au vecteur de* n *éléments* $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{n-1}, i_n)$.