
MCAL/MT - série 1 - Machine de Turing (2 TD)

Exercice 1 : Machine de Turing de base et macro-transitions

On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. On rappelle que \square ne fait pas partie de l'alphabet.

Q1. Que fait la MT $\xrightarrow{\Sigma/\square:L} \textcircled{1} \xrightarrow{\square/\square:L} \textcircled{2}$? Quel langage reconnaît-elle?

Q2. On considère un alphabet $\Sigma = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Expliquez comment réaliser les transitions suivantes à l'aide de transitions classiques : (1) $\textcircled{q} \xrightarrow{\{s_1, s_2\}/s_3} \textcircled{q'}$ (2) $\textcircled{q} \xrightarrow[\ell \in \Sigma - s_1]{\ell/\square:d} \textcircled{q'}$ (3) $\textcircled{q} \xrightarrow{\Sigma:d} \textcircled{q'}$
 (4) Même question pour la transition SKIP ou NOP entre deux états qui ne fait « rien » que, par la suite, on la notera $\textcircled{} \xrightarrow{\epsilon} \textcircled{}$.

Q3. Dessinez une machine $M_{\overrightarrow{\square}}$ qui déplace la tête de lecture jusqu'au dernier symbole à droite différent de \square .

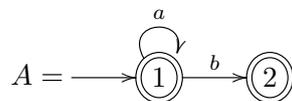
Q4. Dessinez une machine M_{eff} qui efface le ruban et termine, à condition de démarrer sur une partie non vierge du ruban. Pour cela elle remplace tous les symboles par \square , tout en respectant la contrainte qui interdit à tout moment d'avoir un ruban de la forme $\infty \square \mid \omega_1 \mid \square \mid \omega_2 \mid \square^\infty$. Comment se comporte votre machine si on l'appelle sur le ruban vierge ?

Q5. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. Donnez un MT M_{find} qui, quel que soit l'endroit où on la place sur un ruban *non-vierge*, trouve le mot $\omega \in \{0, 1\}^*$ inscrit sur le ruban et se place au début du mot. Vous aurez besoin du symbole \$ pour repérer les endroits déjà explorés mais vous devrez remettre le ruban dans l'état de départ.

Q6. Dessinez une machine $M_{\overleftarrow{\$}}$ qui déplace la tête de lecture vers la gauche jusqu'à rencontrer le marqueur \$ ou un blanc \square . Elle termine dans l'état accepteur $\textcircled{}$ si elle trouve le \$ et dans l'état exception \otimes sinon.

Q7. Pour la MT de la question **Q3** donnez sa description sous la forme d'un sextuplet $(\Sigma, \mathcal{Q}, q_I, \delta, Acc, Exc)$ où Σ est l'alphabet de M , \mathcal{Q} est l'ensemble des états de M , q_I son état initial, sa fonction de transition $\delta : \mathcal{Q} \times \Sigma \cup \{\square\} \rightarrow \Sigma \cup \{\square\} \times \{L, H, R\} \times \mathcal{Q}$, $Acc \subseteq \mathcal{Q}$ est l'ensemble des états accepteurs, $Exc \subseteq \mathcal{Q}$ est l'ensemble des états d'exception.

Q8. (DS 2014) On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Comment traduire les transitions d'un automate (à nombre) d'états fini A en transition de machines de Turing pour obtenir une MT M équivalente à A au sens où $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(M)$? Appliquez votre traduction à l'AEF



Arithmétique en binaire On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. On note $[n]_2$ l'écriture binaire *little endian* (ie. avec les unités à gauche) de l'entier $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, $[4]_2 = 001$, $[5]_2 = 101$.

Q9. Donnez une MT M_{inc} qui incrémente de 1 un entier n écrit sur le ruban en binaire. Vous utiliserez un état q_r pour mémoriser la retenue r à propager. On autorise uniquement des transitions de la forme $q \xrightarrow{l/e:d} q'$ qui effectue à la fois une lecture, une écriture, un déplacement.

Q10. Donnez une MT $M_{0?}$ qui teste si le ruban contient l'entier 0. On adopte la convention que l'entier 0 est représenté par un unique 0. La MT $M_{0?}$ accepte le mot 0 et rejette tout autre mot.

Q11. Donnez une MT M_{dec} qui décrémente l'entier n écrit sur le ruban en binaire puis se replace au début du mot binaire *ie.* $M_{dec}([n]_2) = \mathbb{A}cc([n-1]_2)$ si $n > 0$ et $M_{dec}(0) = \mathbb{E}xc$ *ie.* qu'elle s'arrête dans l'état \otimes pour indiquer que la fonction $M_{dec}(0)$ n'est pas définie.

Exemples :

$$\begin{array}{l}
 - \overline{\infty \square \mid 0 \mid 0 \mid 1 \mid \square \infty} \xrightarrow{M_{dec}} \overline{\infty \square \mid 1 \mid 1 \mid \square \mid \square \infty} \text{ et non } \overline{\infty \square \mid 1 \mid 1 \mid 0 \mid \square \infty} \\
 - \overline{\infty \square \mid 0 \mid 0 \mid 1 \mid 1 \mid \square \infty} \xrightarrow{M_{dec}} \overline{\infty \square \mid 1 \mid 1 \mid 0 \mid 1 \mid \square \infty}
 \end{array}$$

Exercice 2 : L'alphabet minimal Σ_2

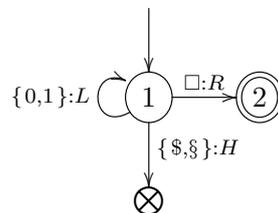
Montrez qu'on peut transformer une MT M opérant sur un alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$, \S\}$ en une MT M' équivalente opérant sur l'alphabet $\Sigma_2 = \{\square_0, \square_1\}$.

Indication : On représente les 4 symboles de $\Sigma \cup \{\square\}$ par des couples de symboles de Σ_2 *ie.*

$$0 = (\square_0, \square_0), 1 = (\square_1, \square_1), \$ = (\square_0, \square_1), \S = (\square_1, \square_0)$$

Quand la machine M fait une transition sur un symbole de Σ la machine M' fait deux transitions.

Le but de cet exercice est de transformer la machine $M_{\square?}$ ci-dessous qui recherche le début d'un mot binaire $\omega \in \{0, 1\}^*$ en une machine équivalente $M'_{\square?}$ opérant sur Σ_2 .



Q12. Procédez par étape :

1. Commencez par rendre explicite les *macro*-transitions de la MT $M_{\square?}$.
2. Traduisez chaque transition en remplaçant les symboles par leur équivalent binaire.
3. Scindez les transitions sur plusieurs en transitions élémentaires en introduisant des états intermédiaires
4. Fusionnez certains états pour que la MT soit déterministe.
5. Réduisez le code de votre MT en fusionnant les états qui ont le même comportement.
6. Ajoutez des transitions vers l'état \otimes lorsqu'on rencontre un \square inattendu.

Exercice 3 : Exécution séquentielle de deux MT

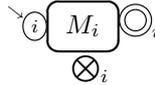
Étant données deux MT

$$M_1 = (\Sigma_1, \mathcal{Q}_1, \bigcirc = i_1, \delta_1, \mathcal{A}cc_1 = \{a_1\}, \mathcal{E}xc_1 = \{e_1\})$$

$$M_2 = (\Sigma_2, \mathcal{Q}_2, \bigcirc = i_2, \delta_2, \mathcal{A}cc_2 = \{a_2\}, \mathcal{E}xc_2 = \{e_2\})$$

on souhaite construire la MT notée $[M_1; M_2]$ qui exécute M_1 puis exécute de M_2 à partir de la position où s'est arrêtée M_1 .

Indication : Pour une instruction seuls deux états terminaux sont possibles \odot ou \otimes en cas d'exception.

On suppose que toutes les MT M_i sont de la forme 

Q13. Dessinez $[M_1; M_2]$.

Q14. Définissez $[M_1; M_2]$ sous la forme $(\Sigma, \mathcal{Q}, \odot, \delta, \mathcal{Acc}, \mathcal{Exc})$.

Exercice 4 : Reconnaissance de langages classiques

Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Pour chacun des langages suivants, donnez une MT qui le reconnaît

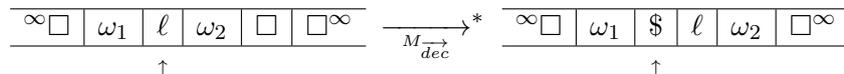
- $L_1 = \Sigma^*$
- $L_2 = \emptyset$
- $L_3 = \{\epsilon\}$
- $L_4 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_5 = \{\omega.R(\omega) \mid \omega \in \Sigma^*\}$ où R est l'opération qui renverse un mot et donc L_5 est l'ensemble des palindromes de longueur paire sur Σ (***)
- $L_6 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (***)

Exercice 5 : Des MT avec états labelisés pour mémoriser des données temporaires

On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. Vous avez le droit d'utiliser les MT déjà construites, l'opérateur de séquence et les transitions génériques.

Définition 1 Un état \odot labelisé par le symbole ℓ est noté \odot_ℓ . On garde en mémoire le symbole ℓ grâce au nom de l'état.

Q15. Donnez une MT M_{dec} qui, à partir de la position courante, décale le contenu du ruban d'une case vers la droite et introduit un \$ à sa position de départ et place la tête sur le \$.

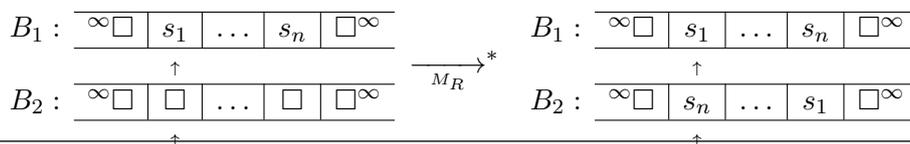


Q16. (*)** On considère un alphabet quelconque Σ contenant au moins \square et $\$$. Donnez une MT qui recopie la donnée du ruban (partie comprise entre les \square) au delà du premier \square de droite et insère un séparateur \$ entre les deux copies de la donnée. Pour simplifier, on suppose que la donnée ne contient pas de symboles \$.

Exercice 6 : Renversement et Palindrome avec des MT à deux bandes

Les transitions d'une MT à deux bandes sont de la forme $\odot \xrightarrow{\ell_1/e_1:d_1}{\odot'}$. La partie $\ell_1/e_1 : d_1$ concernent la bande B_1 et la partie $\ell_2/e_2 : d_2$ concerne la bande B_2 .

Q17. Donnez un MT M_R qui réalise la fonction $R : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ qui renverse un mot fourni.



Q18. Donnez une MT à deux bandes M_{eq} qui *décide* si les mots inscrits sur les bandes sont identiques.

Indication : M_{eq} « décide » signifie que M_{eq} termine toujours et atteint \odot si c'est vrai et un état \otimes sinon.

Q19. À l'aides des MT précédents, donnez une MT à deux bandes M_{pal} qui accepte uniquement les mots de la forme $\omega.R(\omega)$ ou $\omega.s.R(\omega)$

Q20. Donnez une MT à *une seule bande* M'_{pal} qui accepte les mots de la forme $\omega.R(\omega)$ ou $\omega.s.R(\omega)$

Q21. Complétez $\mathcal{L}(M_{pal}) = \dots\dots\dots$